国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第6期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 21 No. 6 1999

正规模糊测度空间上的条件期望*

杜小勇 李 兵

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 讨论了次可加、具有有界变差的正规模糊测度空间上关于模糊测度、内测度及模糊积分的性质,在此基础上定义了此模糊测度空间上随机变量的条件数学期望,它是相对于经典测度空间的一个推广。

关键词 次可加,有界变差,正规模糊测度,条件期望

分类号 O174.12

Conditional Expectation on a Normal Fuzzy Measure Space

Du Xiaoyong Li Bing

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper discussed some properties of fuzzy measure, internal measure and fuzzy integration on a normal fuzzy measure space which is subadditive and has bounded variation. As a result, the conditional expectation of random variable on such measurable space is defined.

Key words subadditive, bounded variation, normal fuzzy measure, conditional expectation

模糊测度与模糊积分理论是经典测度论的延续。经典测度论是在对长度、面积、体积的测量过程中建立和发展起来的,其诸多的优秀结果与经典测度具有的可列可加性有关。随着测度理论的发展,可列可加性相对于实际应用来说是较苛刻的要求,在很多情况下所定义的非负集函数并不满足可列可加性。于是,模糊测度随之产生,也取得了许多结果。1974年,日本学者Sugeno提出了用单调性和连续性来代替可加性的另一类集函数,称之为模糊测度[1],并定义了相应的模糊积分。其理论已经应用于主观评判过程。由于模糊测度不具有可列可加性,因此对于具体的问题一般都是给模糊测度加上一定的条件来讨论。本文将在一类模糊测度空间上定义随机变量的条件期望,主要内容包括次可加、具有有界变差的正规模糊测度空间上测度、内测度及积分的相关结果,该空间上的Radon-Nikodym导数性质,以及随机变量的条件期望。

1 模糊测度与模糊积分

经典测度具有可列可加性,但在许多实际问题中,得到的集函数并不具有该性质,因此产生了模糊测度。下面给出模糊测度的定义。

1.1 定义$(\Omega, \mathscr{R})$为一可测空间,μ为$\mathscr{R}\to[0,+\infty]$上非负集函数,称$\mu$为$(\Omega,\mathscr{R})$上模糊测度,若

(1) $\mu(\phi)=0$

(2) $A, B\in\mathscr{R}, A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$

(3) $A_n\in\mathscr{R}, n=1,2,\cdots, A_n\uparrow\Rightarrow\mu(\cup A_n)=\lim\limits_n\mu(A_n)$

(4) $A_n\in\mathscr{R}, n=1,2,\cdots, A_n\downarrow\exists\, n_0, s.t.\, \mu(A_{n_0})<\infty\Rightarrow\mu(\cap A_n)=\lim\limits_n\mu(A_n)$

若还满足$\mu(\Omega)=1$,称μ为正规模糊测度。Sugeno最早使用的就是正规模糊测度。

有了模糊测度,还可以定义模糊测度的内测度。

* 校实验技术研究项目资助课题
1999年2月21日收稿
作者:杜小勇,男,1976年生,硕士

1.2 定义　设$\{E_i, i=1,2,\cdots,n\}$为E 的可测分划,用$E=\sum_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathscr{R}$表示$E_i(i=1,2,\cdots,n)$是两两不交的且$E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$,$E$ 的可测分划全体用$\prod(E)$表示。令$\mu_*(E)=\sup_{\{\prod(E)\}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\right\}$,称$\mu_*$为$\mu$ 的内测度。若$\mu_*(\Omega)<\infty$,则称μ 具有有界变差。

由定义立即可得内测度的一些基本性质[1]。

1.3 命题$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$为模糊测度空间,μ_*为μ 的内测度,则成立

(1) $\mu(A)\leq\mu_*(A), \forall A\in\mathscr{R}$

(2) $\forall A, B\in\mathscr{R}, A\cap B=\Phi\Rightarrow\mu_*(A\cup B)\geq\mu_*(A)+\mu_*(B)$,且$\mu_*(A)=0\Leftrightarrow\mu(A)=0$

(3) μ_*单调,即$A, B\in\mathscr{R}, A\subset B\Rightarrow\mu_*(A)\leq\mu_*(B)$

(4) 若μ 次可加,则μ_*有限可加。

在模糊测度和内测度的基础上,考虑模糊积分。设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$为模糊测度空间,L^+表示非负有限可测函数全体,Φ 表示非负简单函数全体。对于$f\in\Phi$,定义f 的模糊积分为

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\inf_{\{s:s\geq f\}}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_*(A_i)\right\}$$

其中$s\in\Phi$,$s=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}$,$\sum_{i=1}^{n}A_i=A$。对于$f\in L^+$,取$f_n\in\Phi$,$f_n\uparrow f$,定义$f$ 的模糊积分为

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

关于该积分的基本性质,详见文献[1]。

1.4 命题　μ 为次可加的模糊测度,则$\forall A\in\mathscr{R}$,$f, g\in L^+$,有

$$\int(f+g)\,\mathrm{d}\mu=\int f\,\mathrm{d}\mu+\int g\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.1}$$

证明　μ 次可加,则μ_*有限可加。由于f 在A 上的积分只与f 在A 上的值及A 的可测分划有关,故不妨先设$f\in\Phi$,$f=\sum_{j=1}^{n}b_jI_{B_j}$,$\sum_{j=1}^{n}B_j=A$。由定义可知,$\int f\,\mathrm{d}\mu=\inf_{\{s:s\geq f\}}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_*(A_i)\right\}$,其中$s\in\Phi$,$s=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}$,$\sum_{i=1}^{n}A_i=A$,$A_i\in\mathscr{R}$。若$A_iB_j=\Phi$,则$\mu_*(A_iB_j)=0$。若$A_iB_j\neq\Phi$,则由$s\geq f$ 知,$a_i\geq b_j$。故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}a_i\mu_*(A_i)&=\sum_{i=1}^{m}a_i\mu_*\left(\sum_{j=1}^{n}A_iB_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i\mu_*(A_iB_j)\\&\geq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_j\mu_*(A_iB_j)=\sum_{j=1}^{n}b_j\mu_*(B_j)\end{aligned}$$

于是在函数类$\{s\in\Phi:s\geq f\}$中取下确界即得等式:$\int f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=1}^{n}b_j\mu_*(B_j)$。此时,模糊积分转化为 Lebesgue 积分,由 Lebesgue 积分的性质知(1.1)式成立。

1.5 系　设$c_1, c_2\geq0$,$f, g\in L^+$,则$\forall A\in\mathscr{R}$有

$$\int(c_1f+c_2g)\,\mathrm{d}\mu=c_1\int f\,\mathrm{d}\mu+c_2\int g\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

证明　由(1.1)式及模糊积分的正齐次性[1]可得(1.2)式。

1.6 定理　设μ 为次可加模糊测度,$f\in L^+$,设$v=f\cdot\mu$.为f 关于μ 的不定积分,则$v\ll\mu$,且v 为一经典测度。

证明　由积分性质,$\mu(A)=0\Rightarrow\int f\,\mathrm{d}\mu=0$,故$v\ll\mu$。设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}$,$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$,则由模糊积分的单调收敛定理[1]有

$$v(A)=\int f\,\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega}\sum_{n=1}^{\infty}fI_{A_n}\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}fI_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n}v(A_i)=\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n)$$

即 v 满足 $\sigma-$ 可加性, 又 $f \in L^+$, 故 v 为$(\Omega, \mathscr{R})$上经典测度。

1.7 定理　设 μ 为次可加模糊测度, $f \in L^+$, 则

$$f = 0, \mu - a.e. \Leftrightarrow \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0 \tag{1.3}$$

证明　必要性　设 $f = 0, \mu- a.e.$, 则 $\mu([f > 0]) = 0$。从而

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (f I_{[f>0]} + f I_{[f=0]}) \mathrm{d}\mu = \int_{[f>0]} f \mathrm{d}\mu + \int_{[f=0]} f \mathrm{d}\mu = 0.$$

充分性　设 $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0$, 反设 $\mu([f>0]) > 0$, 即 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f \geq \frac{1}{n}\right]\right) > 0$。由 μ 的下连续性有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f \geq \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_n \mu\left(\left[f \geq \frac{1}{n}\right]\right) > 0$$

由极限保号性知, $\exists\ n_0 \in N$, s.t. $\mu\left(\left[f \geq \frac{1}{n_0}\right]\right) > 0$。于是由命题 1.4 有

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \geq \int_{[f \geq \frac{1}{n_0}]} f \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n_0}\int_{[f \geq \frac{1}{n_0}]} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n_0}\mu^*\left([f \geq \frac{1}{n_0}]\right) \geq \frac{1}{n_0}\mu\left([f \geq \frac{1}{n_0}]\right) > 0$$

与题设矛盾。故 $\mu([f>0]) = 0$, 即 $f = 0, \mu- a.e.$。

2　条件期望

在经典测度论中, 条件期望囿于概率空间上研究。在此, 也将在正规模糊测度空间上来研究条件期望。设$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$为正规模糊测度空间, 且 μ 为次可加, 具有有界变差。X 为 $\mathscr{R}$可测函数, 称为随机变量, $\mathscr{R}_0$为 $\mathscr{R}$的子 $\sigma-$ 代数, 本节将给出 X 关于 $\mathscr{R}_0$的条件期望的定义。

2.1 引理　μ 为$(\Omega, \mathscr{R})$上次可加具有有界变差的正规模糊测度, 则

(1) μ 为次 $\sigma-$ 可加的; (2) μ^* 为$(\Omega, \mathscr{R})$上的经典测度。

证明　(1) 设$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$则$\forall\ n \in N$,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k + \sum_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \mu\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\right) + \mu\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\mu(A_k) + \mu\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

令 $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $B_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, 由反证法易知, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$。又由于 μ 为正规模糊测度, 由 μ 的上连续性有

$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$, 即 μ 为次 $\sigma-$ 可加的。

(2) $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$同上(1)所述, 则由 μ^* 的有限可加性, 有

$$\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\right) + \mu^*\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1}\mu^*(A_k)$$

令 $n \to \infty$, 有 $\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$, 因为 μ 为有界变差的。

另一方面, 由 μ^* 的定义, $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \{B_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathscr{R}$, $\sum_{j=1}^{m} B_j = A = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k$, 有

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) &< \sum_{j=1}^{m}\mu(B_j) + \epsilon = \sum_{j=1}^{m}\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_j\right) + \epsilon \\ &\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k B_j) + \epsilon = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_k B_j) + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k) + \epsilon\end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0^+$, 有 $\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$。综合两方面即得结果。

以下给出正规模糊测度的 Randon-Nikodym 性质。

2. 2 定理　设 v 为$(\Omega,\mathscr{R})$上的经典测度, μ 为$(\Omega,\mathscr{R})$上次可加具有有界变差的正规模糊测度, 且 $v \ll \mu$, 则$\exists$ $g\in\mathscr{R}$ s. t. $v = g.\mu.$, 且 g 在 $\mu - a.e.$ 意义下唯一。

证明　存在性证明方法与经典测度论中的 Lebesgue 分解定理的证明类似[2], 其中用到 Jordan-Hahn 分解定理、引理 2. 1. (2) 以及定理 1. 7。唯一性证明由命题 1. 4、定理 1. 7 及反证法即得。在此从略。

2. 3 定义　设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 为次可加具有有界变差的正规模糊测度空间, X 为$(\Omega,\mathscr{R})$上可测函数, 且 $X\geq 0$, $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{R}$ 的子 σ- 代数, 若 g 为非负 $\mathscr{R}$ 可测函数且满足

$$\forall A \in \mathscr{R}, \int g\,\mathrm{d}\mu = \int X\,\mathrm{d}\mu, \tag{2. 1}$$

则称 g 为 X 关于 $\mathscr{R}$ 的条件期望, 记作 $\mathrm{E}[X \mid \mathscr{R}]$。

一般地, 对于$(\Omega,\mathscr{R})$上可测函数 X, 定义 X 的期望

$$\mathrm{E}X = \int_\Omega X^+\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega X^-\,\mathrm{d}\mu$$

若 X 的期望存在, 则定义 X 关于 $\mathscr{R}$ 的条件期望为

$$\mathrm{E}[X \mid \mathscr{R}] = \mathrm{E}[X^+ \mid \mathscr{R}] - \mathrm{E}[X^- \mid \mathscr{R}]$$

注 1　对于 $X\geq 0$, 则 $v = X.\mu$. 为$(\Omega,\mathscr{R})$上测度, 且 $v\ll\mu$。由定理 2. 2, 在 $\mu - a.e.$ 意义下存在唯一的 $\mathscr{R}$ 可测函数 g, s. t. $v = g.\mu.$。显然 g 满足(2. 1) 式, 故上述定义是有意义的。

注 2　由引理 2. 1(2), 在 μ 为次可加具有有界变差的正规模糊测度时, μ_* 为经典测度, 且由命题 1. 4 知

$$\forall A \in \mathscr{R} \quad \int f\,\mathrm{d}\mu = (L)\int f\,\mathrm{d}\mu_*$$

其中 $(L)\int f\,\mathrm{d}\mu_*$ 为 f 在 A 上的 Lebesgue 积分。又 $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu_*(A) = 0$, 故经典测度论中的条件期望的性质在此几乎都成立, 在此也不再详述。

3　实例

例　设 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\mathscr{R}$ 为 Ω 的幂集。$\forall E\in\mathscr{R}$ 令 $\mu(E) = \left(\dfrac{\mathrm{Card}E}{n}\right)^{1/2}$, 其中 $\mathrm{Card}E$ 是 E 中所含的点的个数。可以验证, μ 为$(\Omega,\mathscr{R})$上的次可加、具有有界变差的正规模糊测度, 但不是经典测度。由 Cauchy 不等式知, $\mu_*(E) = \dfrac{\mathrm{Card}E}{n}$。取 Ω 上子 σ- 代数 $\mathscr{R} = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, \cdots, n\}, \{2, 3, \cdots n\}, \{1, 3, \cdots, n\}, \Omega\}$, $(\Omega,\mathscr{R})$上可测函数 $X(i) = i^2$ (在此仅以非负函数为例, 其它类同)。通过在每个原子上积分, 可算得 X 关于 $\mathscr{R}$ 的条件期望

$$\mathrm{E}[X \mid \mathscr{R}] = \begin{cases} i^2, & i = 1, 2 \\ \dfrac{1}{n-2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2} - 5\right], & 2 < i \leq n \end{cases}$$

可见, 该类模糊测度确可导出合理的条件期望。

4　结束语

对于可测空间上的一类正规模糊测度, 讨论了相应的测度、内测度及模糊积分性质。在此基础上定义了合理的条件期望。它是经典测度条件期望的推广。

参考文献

1　哈明虎, 吴从炘. 模糊测度与模糊积分理论. 北京: 科学出版社, 1998

2　严加安, 测度论讲义. 北京: 科学出版社, 1998

3　Raescu, D. and Adams, G., The fuzzy integeral, J. Math. Anal. Appl., 1986, 75: 562～570