

文章编号: 1001-2486 (2000) 01-0036-04

## 一种新的二维谐波估计方法\*

姜卫东, 陈曾平, 庄钊文

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 研究了二维谐波信号相关矩阵后, 提出了一种称之为“矩阵束的二维谐波估计 (MP2D)”算法, 该算法既不需要求解二维特征多项式的根, 也不需要二维频率空间搜索谱峰, 算法具有高效性。仿真实验表明, 该算法在白噪声条件下对二维谐波频率估计具有高的精度和强的抗干扰能力。

**关键词:** 二维谐波估计; 矩阵束; 奇异值分解; 广义特征值

**中图分类号:** TN957.52      **文献标识码:** A

## A New Method for 2-Demension Harmonic Estimation

JIANG Wei-dong, CHEN Zeng-ping, ZHUANG Zhao-wen

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** After studying the correlation matrix of 2D harmonic signal, we present a new algorithm called “matrix pencil algorithm for 2D harmonic retrieval problem” (MP2D). This algorithm is highly efficient in computation because it does not have to solve the roots of 2D polynomial or search for the peak of 2D frequency space. The simulation experiments show that this algorithm has high precision for 2D frequencies estimation and low sensitivity to noise.

**Key words:** 2D harmonic retrieval; matrix pencil; singular decomposition; generalized eigenvalue

二维谐波估计是现代谱估计中非常关心的问题, 它在声纳回波处理、雷达成像、语音分析、地球物理等众多领域有着广泛的应用。迄今, 二维谐波估计常见的算法有 AR (或 ARMA) 建模方法<sup>[1,2]</sup>, 子空间谐波估计方法<sup>[3]</sup> (如 MUSIC, Pisarenko 等), 线性预测方法<sup>[4]</sup>、最大似然估计方法<sup>[5]</sup>等。这些方法都会遇到二维特征多项式的求解或二维频率空间谱峰的搜索; 二维特征多项式的求解是非常困难的问题, 一般没有通用的有效的求解方法, 二维频率空间谱峰的搜索则需要以巨大的计算量为代价, 且估计精度受到二维频率空间网格的约束, 其本质是一种非参数估计方法。

本文提出的 MP2D (Matrix Pencil method of 2D frequencies retrieval) 算法是一种参数估计方法, 其基本思想是通过二维谐波相关矩阵分析, 把二维谐波参数估计问题分解为二个一维谐波参数估计问题, 而后, 采用一维谐波参数估计的矩阵束方法 (Matrix Pencil Method) 分别估计二组一维谐波的频率, 再把估计的二组一维谐波频率用一种称之为“正交子空间的配对算法” (Pairing Algorithm) 配对, 实现二维频率估计。二维谐波幅度的估计相对简单, 利用二维谐波频率估计结果, 用最小二乘估计 (LS) 或总体最小二乘估计 (TLS) 方法可实现幅度估计。

## 1 问题的提出

设加高斯白噪声的二维谐波信号模型如(1)式:

$$x(m, n) = \sum_{i=1}^I r_i \exp(j\phi_i + j2\pi f_{1i}m + j2\pi f_{2i}n) + w(m, n) \quad (1)$$

其中  $I$  表示二维谐波的个数,  $r_i$  表示谐波幅度,  $\phi_i$  表示谐波相位,  $w(m, n)$  表示与信号不相关的高斯白噪声。数据长度设为:  $0 \leq m \leq M-1; 0 \leq n \leq N-1$ 。

\* 收稿日期: 1999-06-05

基金项目: 国家部委项目资助 (Y6A7)

作者简介: 姜卫东 (1968), 男, 博士生。

令:  $y_i = \exp(j2\pi f_{1i})$ ;  $z_i = \exp(j2\pi f_{2i})$ ;  $a_i = r_i \exp(j\phi_i)$ 。

则(1)式可表示为(2)式形式:

$$x(m, n) = \sum_{i=1}^I a_i y_i^m z_i^n + w(m, n) \quad (2)$$

容易证明  $x(m, n)$  的自相关函数可以由(3)式表示:

$$r(l, k) = \sum_{i=1}^I A_i \exp(j2\pi f_{1i} l) \exp(j2\pi f_{2i} k) + \delta^2(l, k) \quad (3)$$

其中  $\delta^2$  表示白噪声的方差,  $A_i$  表示与频率无关的常量。

令  $k = 0$ , 则(3)式可简化为(4)式:

$$r(l, 0) = \sum_{i=1}^I A_i \exp(j2\pi f_{1i} l) + \delta^2(l) \quad (4)$$

同样, 令  $l = 0$ , 则有(5)式结果:

$$r(0, k) = \sum_{i=1}^I A_i \exp(j2\pi f_{2i} k) + \delta^2(k) \quad (5)$$

由(4)、(5)式可以得出结论: 自相关函数  $r(l, k)$  在  $k = 0$  或  $l = 0$  时, 其仅包含一组频率成分, 即在自相关函数的“边缘”, 频率成分  $\{f_{1i} | i = 1, 2, \dots, I\}$  与  $\{f_{2i} | i = 1, 2, \dots, I\}$  无耦合。本算法正是基于这一“解耦”特性, 把二维谐波频率求解问题分解为二个一维谐波频率求解问题来处理。

## 2 一维谐波频率估计的矩阵束算法

一维谐波频率估计有众多的研究成果, 文献 [6] 研究表明矩阵束算法 (MP) 是高效的一维谐波估计方法, 其基本思想是构造特殊的矩阵 (Hankel 矩阵), 利用矩阵间的特殊关系, 通过求解广义特征值来实现一维谐波频率估计。

设一维谐波信号模型为 (6) 式:

$$x(k) = \sum_{i=1}^I b_i z_i^k \quad (6)$$

其中  $z_i = \exp(j2\pi f_i)$ ,  $b_i = a_i \exp(j\phi_i)$ , 则

$$r(l) = E[x(k)x^*(k+l)] = \sum_{i=1}^I |b_i|^2 / 2z_i^l = \sum_{i=1}^I r_i z_i^l \quad (7)$$

记  $x_k = x(k)$ , 构造矢量:  $D_l = [x_l, x_{l+1}, \dots, x_{N-L+l-1}]^T$ , 其中 T 表示矢量的转置。

构造 Hankel 矩阵:  $X_0 = [D_{L-1}, D_{L-2}, \dots, D_0]$  (8)

$$X_1 = [D_L, D_{L-1}, \dots, D_1] \quad (9)$$

矩阵  $X_0, X_1$  都为  $(N-L) * L$  矩阵。由(7)、(8)、(9)式可把  $X_0, X_1$  改写为(10)、(11)式:

$$X_0 = Z_L R Z_R \quad (10)$$

$$X_1 = Z_L R Z Z_R \quad (11)$$

$$\text{其中: } Z_L = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_l \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & \dots & z_l^{N-L-1} \end{bmatrix}, Z_R = \begin{bmatrix} z_1^{L-1} & z_1^{L-2} & \dots & 1 \\ z_2^{L-1} & z_2^{L-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_l^{L-1} & z_l^{L-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_l), Z = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_l)$$

$$\text{则有: } X_1 - X_0 = Z_L R (Z - N_I) Z_R \quad (12)$$

因此矩阵束  $X_1 - X_0$  的广义特征值为信号的极点  $\{z_i | i = 1, 2, \dots, I\}$ , 求解信号的频率问题转化为求解矩阵束的广义特征值问题。下面给出直接求解方法, 要更详细了解矩阵束广义特征值求解方法, 可参阅文献 [7]。

求解(12)式广义特征值之前, 首先要对矩阵  $X_0, X_1$  作降秩近似, 以减小噪声的影响。

$$X_1 \cong X_{1T} = U_1 \Sigma_1 V_1^H \quad (13)$$

$$X_0 \cong X_{0T} = U_0 \Sigma_0 V_0^H \quad (14)$$

其中  $U_0, U_1, V_0, V_1, \Sigma_0, \Sigma_1$  分别是由主奇异矢量构成的矩阵和由主奇异值构成的矩阵, 所以有

$$\begin{aligned} X_{1T} - \lambda X_{0T} &\cong X_{1T} - \lambda X_{0T} = U_1 \Sigma_1 V_1^H - \lambda U_0 \Sigma_0 V_0^H \\ &= U_2^H U_1 \Sigma_1 V_1^H V_2 - \lambda \Sigma_2 = \Sigma_2 V_2^H [X_{1T}^+ X_{0T} - \lambda I] V_2 \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $X_{1T}^+$  表示  $X_{1T}$  的(Moore-Penrose 逆) 伪逆。这样(12)式矩阵束的广义特征值为矩阵  $X_{1T}^+ X_{0T}$  的特征值。信号频率则为广义特征值的对数。

综合以上推导, 一维谐波信号频率估计的 MP 算法步骤如下:

- (1) 由数据(采样数据或采样数据的自相关函数)按(8)、(9)式构造二个 Hankel 矩阵  $X_0, X_1$ ;
- (2) 对  $X_0, X_1$  矩阵降秩近似得到  $X_{0T}, X_{1T}$ ;
- (3) 计算  $X_{1T}^+ X_{0T}$  及其它的特征值  $\{\lambda_i \mid i = 1, 2, \dots, I\}$ , 取特征值的对数, 获得信号频率。

### 3 二维谐波频率配对

把二维谐波频率估计问题转化为二个一维谐波频率估计问题, 实现二维谐波恢复的重要一步是怎样把二组一维谐波准确配对。子空间理论指出: 由信号构成的子空间与由噪声构成的子空间正交, 由这一理论出发构造的极点配对代价函数解决了频率配对问题。

设二维谐波信号相关函数为  $Re$ , 对  $Re$  进行特征分解, 则  $Re$  可表示为

$$Re = \sum_{i=1}^M \lambda_i u_i u_i^H = U_S \Sigma_S U_S^H + U_n \Sigma_n U_n^H \quad (16)$$

其中  $\lambda_i$  为  $Re$  的特征值,  $u_i$  为  $Re$  的特征向量,  $U_S$  为由主特征值对应的特征矢量构成的矩阵,  $U_n$  由非主特征值对应的特征矢量构成的矩阵。构造如下信号矢量  $e_{Li}$

$$e_{Li} = y_{Li} \overleftarrow{z_{Li}} \quad (17)$$

其中,  $\overleftarrow{\cdot}$  表示 Kronecker 积,  $y_L = [1, y, \dots, y^{P-1}]$ ,  $z_L = [1, z, \dots, z^{Q-1}]$

$$y = \exp(j2\pi f_1) \quad z = \exp(j2\pi f_2) \quad P^* Q = M$$

由子空间理论可知, 信号空间与噪音空间正交 ( $U_S \perp U_n$ ), 这表明由(17)式构成的信号矢量  $e_L$  在  $(f_1, f_2) = \{(f_{1i}, f_{2i}) \mid i = 1, 2, \dots, I\}$  处有:  $e_L \perp U_n$ 。根据这一性质构造如下代价函数:

$$J_n(i, j) = \sum_{k=1}^M \|u_k^H e_L(y_i, z_j)\|^2 \quad (18)$$

显然, 当  $(f_1, f_2) = \{(f_{1i}, f_{2i}) \mid i = 1, 2, \dots, I\}$  时,  $J_n(i, j)$  最小(正交性), 而其它频率组合将有较大的代价。

因此, 频率配对方法为: 固定  $i (i = 1, 2, \dots, I)$ , 对  $j = 1, 2, \dots, I$  分别求出在  $i$  条件下的代价值  $J_n(i, j)$ , 寻找  $J_n(i, j)$  ( $j$  为变量) 的最小值所对应的下标, 设为  $j(i)$ , 则配对频率为  $(y_i, z_{j(i)})$ , 重复以上工作, 直至频率搜索完毕。

在一般情况下, 信号子空间的维数总是小于噪声子空间的维数, 为减少计算量, 引入信号子空间的“反代价函数”, 定义如下:

$$J_S(i, j) = \sum_{k=1}^I \|u_k^H e_L(y_i, z_j)\|^2 \quad (19)$$

$J_S(i, j)$  与  $J_n(i, j)$  不同之处在于, 当  $(f_1, f_2) = \{(f_{1i}, f_{2i}) \mid i = 1, 2, \dots, I\}$  时,  $J_S(i, j)$  为极大值, 而  $J_n(i, j)$  为极小值。

综合以上分析, 频率配对算法过程如下:

- (1)  $i = 1$ , 计算  $J_S(i, j)$ , 其中  $j = 1, 2, \dots, I$ 。
- (2) 在  $\{J_S(i, j) \mid j = 1, 2, \dots, I\}$  中搜索最大值, 其对应的下标为  $j(i)$ , 则配对的极点为  $(y_i, z_{j(i)})$ ;
- (3)  $i = i + 1$

- (4) 计算  $J_S(i, j) \quad j = 1, 2, \dots, I$ , 但  $j \neq j(k)$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, i - 1$ 。  
 (5) 在  $\{J_S(i, j) \mid j = 1, 2, \dots, I, j \neq j(k), k = 1, 2, \dots, i - 1\}$  中搜索最大值, 其对应的下标为  $j(i)$ , 则配对的频率为  $(y_i, z_{j(i)})$ 。  
 (6) 当  $i < I - 1$  时返回(3), 否则结束配对算法。

## 4 MP2D 算法

以上几部分分析一维谐波频率估计的 MP 算法和频率配对算法, 在构造 MP2D 算法之前还需讨论一个问题, 即模型阶数估计问题。由于我们已经求出信号的相关函数矩阵以及相关函数矩阵的特征分解, 因此, 在信噪比较高时可以简单地用特征值的明显差别估计模型阶数; 当信噪比较小时, 可以采用文献 [8, 9] 方法估计模型阶数。

综合以上分析, MP2D 二维频率估计算法如下:

- (1) 由采样数据  $x(m, n), 0 \leq m \leq M - 1; 0 \leq n \leq N - 1$  计算  $M \times M$  自相关矩阵  $R$   
 (2) 对  $R$  进行特征分解, 得到特征值  $\lambda$  和特征向量  $u_i, i = 1, 2, \dots, M$ ; 估计信号的阶数  $I$ , 并构造主特征矢量矩阵  $U_s$  和非主特征矢量矩阵  $U_n$ 。  
 (3) 令自相关矢量  $R1 = \{R(l, 0) \mid l = 1, 2, \dots, M\}, R2 = \{R(0, k) \mid k = 1, 2, \dots, M\}$ , 用一维 MP 算法分别计算极点  $\{y_i \mid i = 1, 2, \dots, M\}$  和  $\{z_i \mid i = 1, 2, \dots, M\}$ 。  
 (4) 采用频率配对算法对  $\{y_i \mid i = 1, 2, \dots, M\}$  与  $\{z_i \mid i = 1, 2, \dots, M\}$  配对。

## 5 仿真实验

仿真实验给出六组频率数据  $(0.26, 0.24), (0.24, 0.24), (0.24, 0.26), (0.28, 0.22), (0.30, 0.20), (0.32, 0.18)$ ; 取采样点数为  $M = N = 50$ , 在信噪比分别为 25dB、15dB、5dB 条件下估计二维频率, 信噪比定义如(20) 式。

$$SNR = 10 \log \left[ \frac{\sum_{i=1}^I (A_i^2 / 2)}{\sigma^2} \right] \quad (20)$$

仿真实验结果如表 1。

表 1 仿真实验结果

Tab 1 The result of simulated experiment

SNR	$(f_{11}, f_{21})$	$(f_{12}, f_{22})$	$(f_{13}, f_{23})$	$(f_{14}, f_{24})$	$(f_{15}, f_{25})$	$(f_{16}, f_{26})$
25 dB	0.2600, 0.2400	0.2400, 0.2400	0.2400, 0.2600	0.2800, 0.2200	0.3000, 0.2000	0.3200, 0.1800
15 dB	0.2601, 0.2400	0.2401, 0.2398	0.2400, 0.2599	0.2802, 0.2201	0.3001, 0.2000	0.3200, 0.1802
5 dB	0.2610, 0.2408	0.2407, 0.2388	0.2392, 0.2622	0.2822, 0.2209	0.3012, 0.2008	0.3211, 0.1809

仿真实验结果表明: 该算法频率配对准确, 在信噪比较高条件下, 该算法估计频率精度非常高, 即使在低信噪比情况下, 该算法对频率的估计仍然有满意的精度。

本文给出的算法是在研究雷达高分辨成像算法过程中提出的, 考虑到算法的估计精度、计算效率和抗噪声能力等方面, 本算法有以下特点: (1) 由于算法不需要频率空间搜索, 而仅在所求的频率点上进行频率配对, 其计算量远远小于 MUSIC 算法。这为二维雷达信号散射中心成像的实时提取提供了高效的、实用的方法; (2) 算法的估计精度由一维 MP 算法决定, 因此算法估计精度高; (3) 该算法在一维频率估计中采用 SVD 分解取主特征矢量等方法抑制噪声, 使得该算法与传统方法比较有高的抗噪声能力。

(下转第 46 页)

图6是微带串馈贴片阵的增益随阵元数目变化的曲线。若馈线无损耗则微带阵的增益应随阵元数的增加而线性增加,考虑馈线损耗时,增益变化情况如下:当阵的元数较少时,增益随阵元的增加而线性增加,这说明在阵较小时,馈线的总长度较短,馈线消耗的功率较少;随着阵元 $N$ 的增加,馈线总长度较长,馈线消耗的功率较多,增益的增加趋向平缓,阵越大,通过增加辐射元使天线的增益提高也越困难,图中显示的极限增益为31.5dB,一般单块贴片天线阵的设计增益最好不超过27dB。

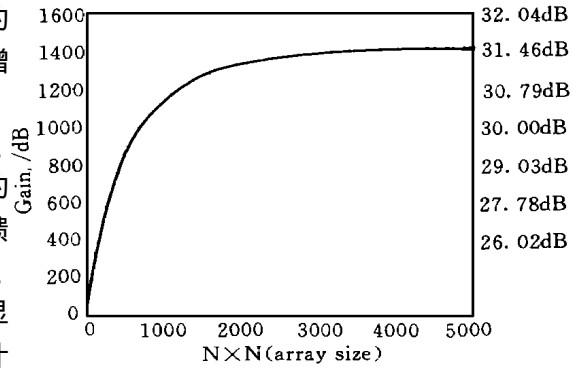


图6 串馈微带阵增益随阵元数变化曲线

Fig. 6 Gain of series-fed patch arrays

### 3 结论

用上述方法可以对串馈微带阵优化设计,不仅可以用来设计计算串馈微带阵,也可以用来设计计算其他串馈阵,在工程上有较大的实用价值。

### 参考文献:

- [1] 张 钧, 刘克成等. 微带天线理论与工程 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1988.
- [2] Lalezari F, Massey C D. mm-Wave Microstrip Antennas [J]. Microwave Journal, 1987, 87-96.
- [3] James J R, Hall P S, Wood C. microstrip antenna theory and design [J]. IEE Peter Peregrinus, 1981: 140.
- [4] 爱金堡. 超高频天线 (中译本) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 1961: 197.

(上接第39页)

### 参考文献:

- [1] Catzow J A, Ogino K. Two dimensional spectral estimation [J]. IEEE Trans on ASSP, 1981, 29: 396-401.
- [2] Zhang X D, Chen J. High Resolution two-dimensional ARMA model [J]. IEEE Trans on ASSP, 1991, 39: 765-769.
- [3] Odendaal J W, Pistorius C W I. Two-dimensional super-resolution radar imaging using the MUSIC algorithm [J]. IEEE Trans on AP 1994, 42: 1386-1391.
- [4] Inder J. High resolution radar imaging using 2-D linear prediction [J]. IEEE Trans on AP, 1994, 42: 31-37.
- [5] Tu M W, Gupta I J, Walton E K. Application of maximum likelihood estimation to radar imaging [J]. IEEE Trans on AP, 1997, 45: 20-27.
- [6] Hua Y B, Sarkar T. Matrix pencil method for estimation parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise [J]. IEEE Trans on ASSP, 1990, 38: 812-824.
- [7] Hua Y B, Sarkar T. On SVD for estimation generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise [J]. IEEE Trans on SP, 1991, 39: 892-900.
- [8] Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria [J]. IEEE Trans on ASSP, 1985, 33: 387-392.
- [9] Wax M, Ziskind I. Detection of the number of coherent signals by MDL principle [J]. IEEE Trans on ASSP, 1989, 37: 1190-1196.