国防科技大学学报
第 22 卷 第 1 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.22 No.1 2000

文章编号：1001-2486（2000）01-0052-04

基于信息熵的模糊控制系统稳定性分析※

张湘平，贺汉根
（国防科技大学机电工程与自动化学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：鉴于模糊控制系统稳定性分析方法的复杂性和不完善性，用信息论的观点思考这一问题。依据李雅普诺夫稳定性分析原理，通过引入信息熵的概念，对模糊控制系统的稳定性分析方法进行深入研究和探讨。在综合考虑系统动态品质和稳定边界要求的基础上，给出了一般模糊控制系统的稳定性定义，并通过严格的数学推导证明了使模糊控制系统稳定的一个充分条件。

关键词：模糊控制；稳定性；信息熵
中图分类号：TP13 文献标识码：A

Stability Analysis of Fuzzy Control Systems Based on Information Entropy

ZHANG Xiang-ping, HE Han-gen
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Considering the complexity and non-perfection of the stability analysis in fuzzy control systems, we used the view of information theory to study this problem. Based on Lyapunov stability analysis law, the problem is deeply researched and discussed by introducing the concept of information entropy. Through considering comprehensively the dynamic characteristic and stability boundary of fuzzy control systems, the stability definition of fuzzy control systems is given, and a new stability sufficient condition of fuzzy systems is proved by strict mathematical deducing.

Key words: fuzzy control; stability; information entropy

1 系统的一般表示

就模糊控制系统而言，它的被控对象（过程）多具有不确定性和复杂性等特点，难以用精确数学模型描述。模糊控制器通常是在综合了多方面信息的情况下给出控制决策的，比如：考虑系统当前时刻的误差 $e(t)$、误差的变化率 $\dot{e}(t)$，考虑系统动态过程本身具有的特征，以及前一时刻控制效果等等。因此，可以说模糊控制推理与决策蕴涵着专家的控制经验和负反馈控制的基本原则，它的基本出发点是控制系统的输入、输出信息。基于这种思想，我们可设被控系统的广义数学模型为

$$f(y, y', \cdots, y^{(n)}) = u \tag{1}$$

式中：u 为控制输入变量；

$y, y', \cdots, y^{(n)}$ 为系统输出变量及其各阶导数；

$f(\cdot)$ 为基于模糊控制规则描述的广义非线性函数形式。

由(1)式，我们可以认为：控制输入变量 u 是系统的集中表现，系统输出 y 及其变化率的信息均包含于 u 中。不失问题的一般性，可设系统输出的稳态值 $y(\infty) = 0$，即有：

$$e(t) = y(t) - y(\infty) = y(t) \tag{2}$$

根据(2)式，可将(1)式表示为：

※ 收稿日期：1999-09-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目（510.8050）
作者简介：张湘平（1963-），男，副教授，在职博士生。

$$f(e, e', \cdots, e^{(n)}) = u \tag{3}$$

式中:$e, e', \cdots, e^{(n)}$ 分别为系统误差及其各阶导数,其它符号意义同(1)式相同。所以,模糊控制问题实质上就是要寻找(3)式右边 u 的某种近似形式,使得系统稳定,并且还具有期望的系统动态特性。

2 系统的稳定性定义

李雅普诺夫稳定性分析的直接法是一种普遍的方法,对于线性和非线性系统都适用,原则上可以适用于任何复杂系统。根据(3)式给出的一般系统的表示,我们可将李亚普诺夫函数 $V(x)$ 理解为误差函数 $V(e(t))$ 来进行分析。在综合考虑系统动态品质和稳定边界要求的基础上,给出一般系统的稳定性定义。

设被控系统期望的闭环误差特性属于集合 S_d

$$S_d:\begin{cases}\dot{e} = -\alpha(e - e_f) \\ |e_f| < p\end{cases}$$

式中 e_f 为最终误差,p 为预先给定的精度,α 为动态衰减因子且 $\alpha = (1/\tau)\ln(|e_0|/p)$,其中 e_0 为初始误差或允许的最大误差,τ 为 e 达到期望精度所需要的时间。于是,我们有关于系统稳定性的定义。

定义1 设 S_d, E_F, E_A 分别为期望输出 y_d 的集合,误差满足某一精度的集合和误差的允许集合,其形式为

$$E_F(t) = \{e_f(t) \mid e_f < p\}$$

$$E_A(t) = \{e(t) \mid e^2(t) \leq e_0\exp(-\alpha p)\}$$

显然 $E_F(t) \subset E_A(t)$,称系统在 $[\tau, \infty]$ 区间上具有稳定性。

关于上述系统的稳定性有下述定理来保证。

定理1 设控制系统具有下述控制规律:

$$u(t) = \beta[\alpha e(t) + \dot{e}(t)]$$

$$\alpha = (1/\tau)\ln(|e_0|/p)$$

如果选择 β 满足条件:$\beta > |u(t)|/\alpha p$,则闭环控制系统具有稳定性。定理1的证明,详见参考文献[1]。

3 系统的稳定性分析

由于在实际应用中,一般仅用系统误差 $e(t)$ 和系统误差变化率 $\dot{e}(t)$ 两方面信息来进行模糊控制决策。为了便于讨论问题,我们将(3)式可以简化表示为

$$f(e, \dot{e}) = u \tag{4}$$

我们采用 T—S 模糊模型来表示一般系统的模糊隐函关系,即

R^1:IF e 是 A_1^1,$\dot{e}$ 是 A_2^1,

THEN $u^1 = p_0^1 + p_1^1 e + p_2^1 \dot{e}$

⋮

R^N:IF e 是 A_1^N,$\dot{e}$ 是 A_2^N,

THEN $u^N = p_0^N + p_1^N e + p_2^N \dot{e}$

$$u = \frac{\sum \mu_{R^i} \cdot u^i}{\sum \mu_{R^i}}$$

所以,对 $(e, \dot{e})$,得

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{N}(A_1^i(e)\wedge A_2^i(\dot{e}))\cdot(p_0^i+p_1^ie+p_2^i\dot{e})}{\sum_{i=1}^{N}(A_1^i(e)\wedge A_2^i(\dot{e}))} \tag{5}$$

令 β_i 为

$$\beta_i=\frac{A_1^i(e)\wedge A_2^i(\dot{e})}{\sum_{i=1}^{N}(A_1^i(e)\wedge A_2^i(\dot{e}))} \tag{6}$$

则

$$u=\sum_{i=1}^{N}\beta_i(p_0^i+p_1^ie+p_2^i\dot{e}) \tag{7}$$

可以说,(7) 式是(4) 式的一种具体表示形式。如果能唯一确定式中的每一个参数,并且这些参数值能精确表达专家们的控制经验,那么,我们就得到一个完美的模糊控制器的设计。但是,由于以下主要原因的影响:

(1) 模糊化涉及自然语言的含糊性和不精确性;

(2) 模糊控制规则的不合理性;

(3) 去模糊策略的非最佳性。

这就使得控制变量 u 具有本质的不确定性。用概率密度 $P(u)$ 表示 $u(t)$ 落入由定理 1 所规定的允许控制集合 Ω_u 的不确定性,且$\int_{\Omega_u}p(u)\mathrm{d}u=1$,即对这个概率密度,可以赋予以下熵函数:

$$H(u,p)=-\int_{\Omega_u}p(u)\ln p(u)\mathrm{d}u \tag{8}$$

再构造一个稳定特性函数:

$$\Phi(u)=\|u(t)-u^*(t)\| \tag{9}$$

式中:$u^*(t)$ 为满足系统稳定条件,属于允许控制集合的控制变量,我们称之为理想控制变量。从物理概念上讲,若模糊控制器所选择的所有控制量 $u(t)$,都可使得 $\Phi(u)\rightarrow\min$ 那么,这个系统一定是稳定的。从模糊控制器的设计角度出发,可得模糊控制器的后件参数选择应满足的稳定约束条件为

$$\Phi(u)=\left\|\sum_{i=1}^{N}\beta_ip_0^i+\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_ip_1^i-\alpha\beta\right)e+\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_ip_2^i-\beta\right)\dot{e}\right\|\rightarrow\min \tag{10}$$

那么,满足(10) 式的充分条件是什么呢?

设 $\Phi(u)$ 的期望值等于 k,即:$E(\Phi(u))=k$。于是,我们可得熵的无约束的表达式为

$$\begin{aligned}I&=H(u,p)-\mu[E(\Phi(u))-k]-\lambda_1\left[\int_{\Omega_u}p(u)\mathrm{d}u-1\right]\\&=-\int_{\Omega_u}[p(u)\ln p(u)+\mu p(u)\Phi(u)]\mathrm{d}u-\lambda_1\left[\int_{\Omega_u}p(u)\mathrm{d}u-1\right]+\mu k\end{aligned} \tag{11}$$

根据 Jaynes 原理,可选择 $p(u)$ 使熵为最大。依据(11) 式,利用变分引理,I 对 $p(u)$ 的极大要求为

$$\frac{\partial}{\partial P}[-P\ln P-\mu p\Phi-\lambda_1P]=0;\frac{\partial^2I}{\partial P^2}<0$$

$$-\ln P-1-\mu\Phi-\lambda_1=0;-\frac{1}{P}<0$$

因此,在最坏情况下的概率密度为

$$p(u)=\mathrm{e}^{-\lambda-\mu\Phi(u)};\lambda=\lambda_1+1 \tag{12}$$

将(12) 式代入(8) 式,即可得在最坏情况下的熵函数为

$$H(u,p)=\lambda+\mu E(\Phi(u)) \tag{13}$$

为了求得系统的最优稳定控制,可将(13) 式相对 u 求极小。即得

$$\mathrm{d}H/\mathrm{d}u = \partial H/\partial u + \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial u} = 0 \tag{14}$$

但是,(13) 式说明:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{15}$$

根据上述,下面的定理建立了系统稳定性与最坏情况熵的极小化之间的等效性。

定理 2 使系统稳定的充分条件是:$u(t)$ 使 $\Phi(u) \to \min \Leftrightarrow u(t)$ 使 $H(u,p) \to \min$。

证明 从 Jaynes 极大熵条件可得

$$H(u,p) = \lambda + \mu E(\Phi(u))$$

且满足(15) 式,因此:

$$\min_u H(u,p) \Leftrightarrow \partial H/\partial u = 0$$

$$\Leftrightarrow \min_u E\{\Phi(u)\} = \int_{\Omega_u} \min \Phi P \mathrm{d}u$$

利用变分引理,这等效于使(ΦP) 极小或有:

$$\partial(\Phi P)/\partial u = \partial\Phi/\partial u \cdot P + \Phi \cdot \partial P/\partial u = 0 \tag{16}$$

而依据(12) 式,可得

$$\partial P/\partial u = -\mu(\partial\Phi/\partial u) \cdot P \tag{17}$$

将(17) 式代入(16) 式中,得

$$(1 - \mu\Phi) \cdot \partial\Phi/\partial u \cdot P = 0 \tag{18}$$

由于 $P \neq 0$,$\mu\Phi \neq 1$。所以必有:

$$\partial\Phi/\partial u = 0$$

即 :当 $H(u,p) \to \min$,则必有:

$$\Phi(u) \to \min$$

证毕。

4 结论

本文提出的模糊控制系统的稳定性定理,虽然在证明中利用了 Saradis 关于智能控制系统中的最优控制定理的证明思路,但是它在模糊控制系统的稳定性理论研究中仍不失为一种好的新思想。

参考文献:

[1] 李士勇 . 模糊控制、神经控制和智能控制论 [M] . 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996.
[2] 李人厚等 . 智能控制理论和方法 [M] . 西安:西安交通大学出版社,1994.
[3] Tanaka K,Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy [J]. Fuzzy and Sets and Systems,1992,45 (2):135-156.