

文章编号: 1001-2486 (2000) 01-0085-04

## 平面光波导的数值传递函数方法\*

李海阳<sup>1</sup>, 冯莹<sup>2</sup>, 周建平<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073; 2. 国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 把数值传递函数方法应用于对平面光波导的分析。本方法从光波导的标量变分关系出发, 通过状态方程对问题求解计算。文中引入了传递函数无穷单元的概念, 使得本方法在处理近截止区域的问题时更加合理, 计算量更小。文后给出了本文方法的应用和算例, 与多种方法进行了比较, 表明本文方法在处理折射率均匀分布和渐变分布波导时都有着特有的优势。

**关键词:** 光波导; 传递函数方法; 无限元

中图分类号: TN929.1 文献标识码: A

## Numerical Distributed Transfer Function Method for Planar Optical Waveguides

LI Hai-yang<sup>1</sup>, FENG Ying<sup>2</sup>, ZHOU Jian-ping<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Numerical distributed transfer function method is applied to planar optical waveguides. By using scalar variational principle, the numerical transfer function equations are derived. Then problems are solved in the form of state space. Infinite elements are introduced to reduce the amount of computation. This is more reasonable in the near cut-off case. Application and numerical examples are given and compared with several other methods, which show the advantage of this method on planar optical waveguides with either step or graded refractive index profile.

**Key words:** optical waveguides; transfer function method; infinite element

随着集成光学的迅猛发展, 光波导的计算不断受到广泛关注。文献 [1] 把近年来力学分析中发展起来的传递函数方法引入对光波导问题的分析。本文从光波导问题的标量变分原理出发, 引入了传递函数方法的扩展形式——数值传递函数方法<sup>[2]</sup>, 并且建立了无穷单元。本文方法与文献 [1] 中方法相比效率有很大提高, 对扩散波导的计算求解也更加方便。

### 1 基本原理

由麦克斯韦方程出发可以建立一维情况光波导问题的标量形式变分:

$$\delta L = \delta \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\mu(x) \phi'(x))^2 - q(x) k_0^2 \phi^2(x) + \mu(x) \beta^2 \phi^2(x) dx \right) = 0 \quad (1)$$

其中  $k_0$  表示真空中的波数,  $\beta$  表示传播常数,  $n$  为折射率。对  $E^x$  模,  $\phi = E_x$ ,  $\mu = 1$ ,  $q = n^2$ ; 对  $E^y$  模,  $\phi = H_x$ ,  $\mu = 1/n^2$ ,  $q = 1$ 。

利用数值传递函数求解时, 与文献 [1] 相似, 首先需要划分单元。将区间  $(-\infty, \infty)$  划分为  $NK + 2$  个区间与  $NK + 1$  个结点的集合, 其中包含两个无穷区间  $(-\infty, x_0)$  与  $(x_{NK}, \infty)$  与  $NK$  个有限区间  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, NK$ 。结点用  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, NK$  表示。每一个区间为一个单元, 设有限单元的长度为  $2a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, NK$ ), 以单元中点为原点, 建立局部坐标系  $o_i \xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, NK$ ); 无穷单元以端点

\* 收稿日期: 1999-06-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19572027); 国家杰出青年科学基金资助项目 (19925209)

作者简介: 李海阳 (1972-), 男, 博士生。

为原点建立局部坐标系  $o_i \xi_i (i = 0, NK + 1)$ 。

数值传递函数方法的广义变量为定义在单元区间上的未知函数, 设第  $i$  个单元上的未知场量为  $\phi_i(\xi_i), i = 0, 1, \dots, NK + 1$ , 这样就建立起了本文方法的基本离散模型。

将离散模型  $\phi_i(\xi_i)$  代入方程(1), 根据  $\delta\phi_i(\xi_i)$  的任意性, 可以得到第  $i$  个单元内的控制方程

$$p(\xi_i)\phi_i''(\xi_i) + p'(\xi_i)\phi_i'(\xi_i) + q(\xi_i)k_0^2\phi_i(\xi_i) - p(\xi_i)\beta^2\phi_i(\xi_i) = 0 \quad (2)$$

根据结点上  $\delta\phi(x_i)$  的任意性, 可以得到单元之间的拼接条件:

$$p(a_i)\phi_i'(a_i) = p_{i+1}(-a_{i+1})\phi_{i+1}'(-a_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, NK - 1 \quad (3)$$

$$p(0)\phi_0'(0) = p_1(-a_1)\phi_1'(-a_1); \quad p_{NK}(a_{NK})\phi_{NK}'(a_{NK}) = p_{NK+1}(0)\phi_{NK+1}'(0)$$

对方程(2)(3)的处理可以分有限单元和无限单元两种情况来进行讨论。首先讨论在有限单元中的处理方法。有限单元对应单元标号  $i = 1, 2, \dots, NK$  的情况。定义状态向量

$$\eta_i(\xi_i) = \{\phi_i(\xi_i), \phi_i'(\xi_i)\}^T \quad (4)$$

把控制方程写成状态空间形式

$$\eta_i'(\xi_i) = F(\xi_i)\eta_i(\xi_i) \quad (5)$$

其中,

$$F(\xi_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_0^2 q(\xi_i) \mathcal{V} p(\xi_i) - \beta^2 & -p'(\xi_i) \mathcal{V} p(\xi_i) \end{bmatrix}$$

由单元离散模型可以直接写出边界条件

$$M\eta_i(-a_i) + N\eta_i(a_i) = \gamma_i \quad (6)$$

其中,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_i = \begin{Bmatrix} \phi_i(-a_i) \\ \phi_i(a_i) \end{Bmatrix}$$

方程(5)(6)的解根据文献[2]可以表示为

$$\eta_i(\xi_i) = H_i(\xi_i)\gamma_i \quad (7)$$

其中,

$$H_i(\xi_i) = \phi_F(0, \xi_i) [M\phi_F(0, -a_i) + N\phi_F(0, a_i)]^{-1}$$

$\phi_F(x_0, x)$  通过极限定义<sup>[2]</sup>将区间  $[x_0, x]$  分成  $n$  个区间, 各区间长度分别为  $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,

当  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\phi_F(x_0, x) = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} (e^{F(x)\Delta_n} e^{F(x_{n-1})\Delta_{n-1}} \dots e^{F(x_1)\Delta_1}) \quad (8)$$

我们称(7)式中的矩阵函数  $H_i(\xi_i)$  为单元的数值传递函数。将(7)式代入结点平衡关系(3), 可以得到单元结点平衡系数矩阵

$$K_i = \begin{bmatrix} -B p(-a_i) & H_i(-a_i) \\ B p(a_i) & H_i(a_i) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中,  $B = [0 \quad 1]$

处理无穷单元的方法与处理有限单元的方法有所不同。无穷单元对应单元编号  $i = 0, NK + 1$  的情况。首先假设无穷单元的折射率是常数, 这在实际问题中是很合理的。这样方程(2)可以简化为

$$p_i \frac{d^2 \phi_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} + q_i k_0^2 \phi_i(\xi_i) - p_i \beta^2 \phi_i(\xi_i) = 0 \quad i = 0, NK + 1 \quad (10)$$

此方程的通解可以表示为

$$\phi_i(\xi_i) = C_i^0 e^{A_i \xi_i} + C_i^1 e^{-A_i \xi_i} \quad (11)$$

其中,  $A_i = \sqrt{(p_i \beta^2 - q_i k_0^2) \mathcal{V} p_i}$ , 光波导问题涉及的是存在导模的情况, 这时有  $A_i > 0$ , 且在无穷远处场量为零。这样无穷单元的边界条件可以写为

$$\phi_0(-\infty) = 0; \phi_0(0) = \psi(x_0) \equiv \gamma_0; \phi_{NK+1}(\infty) = 0; \phi_{NK+1}(0) = \psi(x_{NK}) \equiv \gamma_{NK+1} \quad (12)$$

这样,方程(2)在无穷区间的解可以表示为

$$\phi_0(\xi_0) = \gamma_0 e^{A_0 \xi_0} \quad \phi_{NK+1}(\xi_{NK+1}) = \gamma_{NK+1} e^{-A_{NK+1} \xi_{NK+1}} \quad (13)$$

将(13)式代入拼接关系(3)可得单元结点平衡系数矩阵

$$\mathbf{K}_0 = p_0 \mathbf{A}_0 \quad \mathbf{K}_{NK+1} = p_{NK+1} \mathbf{A}_{NK+1} \quad (14)$$

利用单元结点平衡系数矩阵(9)(14),可以由(1)式得到结点变分关系

$$\sum_{i=0}^{NK+1} \delta \gamma_i \mathbf{K}_i \gamma_i = 0 \quad (15)$$

采用类似有限元方法的组集技术,对(15)式中的下标  $i$  组集,可以得到矩阵形式的结点变分方程。对单元结点场量  $\gamma_i$  组集后可以得到总结点场量  $\gamma$ ,利用  $\delta \gamma$  的任意性可以得到方程

$$\mathbf{K}(k_0, \beta) \gamma = 0 \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{K}$  由矩阵  $\mathbf{K}_i$  组集得到。当方程(16)存在非零解时表明导模存在,此时对应有

$$\det(\mathbf{K}(k_0, \beta)) = 0 \quad (17)$$

式(17)即为传播常数  $\beta$  与真空中波数  $k_0$  之间的关系方程。由(17)式得到  $\gamma$  的非零解后,将其回代入式(7)(13),即可得到各个区间上模场的分布情况。

## 2 应用与算例

根据以上理论,笔者利用 MATLAB 对不同条件下的问题进行了测试。与同样软件编制的有限元程序和传递函数方法程序相比,本文方法程序计算速度要快得多。

### 2.1 均匀波导

本文方法在计算均匀平板波导时,实际是一种解析的方法。首先考虑一个简单的阶跃型折射率分布平板波导(三层均匀波导),薄膜层、衬底和覆盖层的折射率分别用  $n_g, n_s, n_c$  来表示,薄膜层厚度用  $w$  表示。各参数分别取为:  $n_g = 1.5, n_c = n_s = 1.4, w = 1.0 \mu\text{m}$ 。利用本文方法可以很容易得到图1所示的归一化色散曲线,其中实线为 TE 模,虚线为 TM 模,归一化频率  $v$

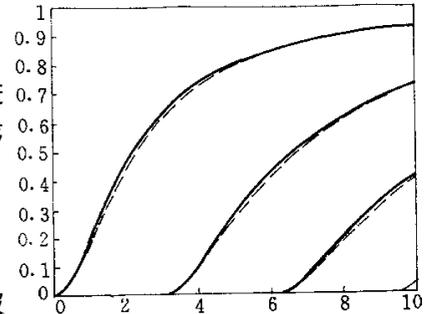


图1 三层板波导  $v$ - $b$  关系

Fig.1 The  $v$ - $b$  relation of planar optical wave guides

$= k_0 w \sqrt{n_g^2 - n_s^2}$ , 归一化折射率(归一化传播常数)  $b = ((\beta/k_0)^2 - n_s^2)(n_g^2 - n_s^2)$ 。

### 2.2 折射率连续分布波导

考虑各向同性介质中的扩散平面波导。设折射率为指数分布,即有

$$\begin{cases} n^2(x) = n_s^2 + (n_g^2 - n_s^2) \exp(-x/w) & x > 0 \\ n^2(x) = n_c^2 & x < 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $n_s$  为衬底折射率,  $n_c$  为覆盖层折射率,  $n_g$  为波导芯层的最大折射率,  $w$  为扩散深度。归一化频率和归一化折射率的定义与 2.1 相同。选取参数  $n_g^2 - n_s^2 = 0.187, n_s = 2.177, n_c = 1.0, \lambda = 1.3 \mu\text{m}$ 。表1给出了本文解与精确解、传递函数方法(TFM)<sup>[1]</sup>、有限元(FEM)<sup>[3]</sup>、爱里函数(AF)<sup>[4]</sup>方法、WKB方法的比较情况,其中本文方法将区间划分为7个单元,传递函数方法(TFM)划分了50个单元,有限元(FEM)方法采用了800个单元。

### 2.3 扩散各向异性波导

实际的沟道波导往往是各向异性的,考虑  $\text{LiNbO}_3$  波导,折射率分布为

$$\begin{cases} n_o(x) = n_{os} + \Delta n_o \exp[-(x/w)^2] & x > 0 \\ n_e(x) = n_{es} + \Delta n_e \exp[-(x/w)^2] & x > 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $w$  为扩散深度,  $n_{os}, n_{es}$  分别为衬底寻常光和非常光的折射率,  $\Delta n_o, \Delta n_e$  分别为寻常光和非常光在波导芯层和衬底之间的最大折射率差。覆盖层为空气,折射率  $n_c = 1.0$ 。表2给出了本文方法(NTFM)

与传递函数方法(TFM)<sup>[1]</sup>、有限元法(FEM)<sup>[3]</sup>、多层近似法(MAM)<sup>[5]</sup>的比较情况。其中有限元方法选取800单元,传递函数方法选取200单元,本文采用和2.2中相同的划分;波导参数取为: $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ,  $n_{es} = 2.20$ ,  $n_{os} = 2.286$ ,  $\Delta n_o = \Delta n_e = 0.01$ 。

表1 指数分布波导TE模归一化折射率

Tab.1 Normalized Propagation constant for the TE mode in exponential diffused planar waveguides

$v$	精确解	本文解	TFM	AF	WKB	FEM
1.5	0.035007	0.035005		0.035017	0.038	
2.0	0.104954	0.104943	0.104956	0.105028	0.109	0.104
2.5	0.171442	0.171433	0.171493	0.171520	0.175	
3.0	0.229188	0.229181	0.229206	0.229189	0.233	0.227
4.0	0.321179	0.321175	0.321199	0.321235	0.325	0.318
5.0	0.390292	0.390290	0.390393	0.390366	0.393	
7.0	0.487244	0.487247	0.487365	0.487272	0.490	
8.0	0.522776	0.522781	0.522899	0.522800	0.526	

表2 高斯分布波导TE模

Tab.2 Refractive index of diffused anisotropic planar waveguide

$w (\mu\text{m})$	TE	NTFM	TFM	FEM	MAM
3.0	0	2.2058205	2.2058198	2.20582	2.20583
	1	2.2015930	2.2015932	2.20159	2.20160
5.0	0	2.2073614	2.2073601	2.20736	2.20783
	1	2.2042741	2.2042737	2.20427	2.20430
	2	2.2018515	2.2018517	2.20184	2.20187
	3	2.2002846	2.2002851	2.20028	2.20027

### 3 结论

把数值传递函数方法应用于光波导的计算,作为对文献[1]中方法的推广和发展。本方法是数学物理问题中的一种通用方法,它在处理光波导问题时,从标量变分关系出发,考虑折射率分布的一般情况,推导出了数值传递函数解的计算公式,并且建立了传递函数无限单元,用于对无穷边界的近似。本方法与传递函数法、有限元法、爱里函数法等的比较证明本方法是一种实用有效的新方法,在光波导领域很有实际应用价值。本方法还可以推广到对二维情况,以及三维衰减传播情况的分析,这将在后续的工作中给出。

### 参考文献:

- [1] 冯莹,李湘荣,李海阳,周建平. 扩散平面光波导的传递函数方法[J]. 光学学报, 1999, 19(1): 50-56.
- [2] 李海阳,周建平,冯志刚. 变截面梁的数值传递函数方法[J]. 国防科技大学学报, 1999, 21(4): 22-25.
- [3] Katsriku F A, Rahman B M A, Grattan K T V. Finite element analysis of diffused anisotropic optical waveguides[J]. J. Lightwave Technol., 1996, 14(5): 780-786.
- [4] Goyal I C, Gallawa R L, Ghatak A K. Methods of analyzing planar optical waveguides[J]. Opt. Lett., 1991, 16(1): 30-32.
- [5] Yamanouchi K, Kamiya T, Shibayama K. New Leaky surface waves in anisotropic metal-diffused optical waveguides[J]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1978, MTT26(4): 298-305.

