

文章编号: 1001-2486 (2000) 01-0089-05

预处理方法在低速粘性流动中的应用*

廖守亿, 王正华, 王承尧

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 用时间相关法、LU-SGS 隐式求解经过预处理后的二维可压 Navier-Stokes 方程, 数值模拟了低速情况下不同马赫数、不同雷诺数的驱动空腔流动。为了使时间相关法能应用于计算低速流动及加快收敛, 在控制方程的时间导数项前乘了一个预处理矩阵, 实现了对方程的预处理。数值模拟结果表明, 预处理确实加快了计算的收敛性, 而定常解却没有改变。所得结果与可能的计算结果进行了比较。

关键词: 时间相关法; 预处理; LU-SGS; 低速流动; 驱动空腔

中图分类号: V211.3 文献标识码: A

The Application of Preconditioning in Viscous Flow at Low Speeds

LIAO Shou-yi, WANG Zheng-hua, WANG Cheng-yao

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The time-dependent method&LU-SGS implicit scheme has been used to solve 2D compressible Navier-Stokes equations which are preconditioned and simulate the driven cavity flow field at different low Mach numbers and different Reynold numbers. To apply the time-dependent method to simulate the flow field at low speeds validly and accelerate the convergence rates, a matrix called preconditioning matrix has multiplied the time-derivative terms of Navier-Stokes equations. This is known as preconditioning. Convergence rates are accelerated for a certainty, while providing solutions are identical to those obtained without preconditioning methods. The results are compared with available data.

Key words: time-dependent method; preconditioning; LU-SGS; low speeds flow; driven cavity

在计算流体力学 (CFD) 中, 时间相关法被广泛运用于可压缩流动的计算中, 已被 CFD 工作者广泛接受并视为计算跨音速、超音速和高超音速流动的首选方法。经过近三十年的发展, 在可压缩流动的计算中, 已形成较为成熟与可靠的理论和方法。然而, 在计算低马赫数流动 ($M < 0.3$) 时, 时间相关法表现得并不好。这是因为当流动速度和音速比较起来, 量级相差很大时, 时间相关方程的对流项具有很强的“刚性”, 因而信息在流场中的传播速度相差很大, 计算时收敛很慢, 而且粘性耗散项使得收敛进一步减慢。而在可压流动中, 很少遇到这样的问题。因此我们想通过改变系统的传输特性来消除波速的量级差异, 以此来达到消除特征值刚性的目的, 而解决的方法就是时间导数预处理。为了使时间相关法能在全流速、全雷诺数流动^[1]中得到广泛的应用, 我们将应用预处理方法来消除计算低马赫数时的收敛困难。

在低马赫数流动中, 由于流场的速度很低, 压缩性可以被忽略, 而刚性问题可以通过将方程转换到不可压方程而得到解决, 计算方法一般采用涡一流函数法或 SIMPLE 等系列算法。但是在有些流场中, 既包含了低速流动, 又包含高速流动 ($M > 0.3$), 此时控制方程必须用可压缩方程。在工程实际中这样的问题可以分为两类^[1]: 一是高速流动中有低速流动。如收缩性很强的喷管内流场, 其进口马赫数很低, 而流场内则有超音速流动。又如在低速大攻角流动中, 流场中大部分是低速流动, 但局部地区可能出现激波。二是低速流动中由于有热量的加入, 而使得密度和温度有较大的变化, 此时流场也是可压的。通过预处理方法可以很好地解决这类刚性问题。

* 收稿日期: 1999-05-25

基金项目: 中科院大气物理所资金资助

作者简介: 廖守亿 (1974), 男, 硕士生。

预处理方法的研究始于80年代,目前国外对于预处理的研究相当普遍,有大量关于预处理的研究与应用的文章出现,已成功地应用于低速、高速和低速、低速燃烧及化学非平衡流流场的计算中,应用非常广泛,其加速收敛的能力得到了公认。预处理方法的思想源于人工压缩法,但它是人工压缩法的丰富和发展,其适用范围与性能是人工压缩法不能比的。

驱动空腔流动被认为是计算不可压流动的标准算例,本文应用预处理方法求解了低速情况下的空腔流动,为以后进一步处理复杂的工程问题奠定了基础。

1 预处理方法

1.1 控制方程

经过预处理后的二维可压 Navier-Stokes (NS) 方程在一般曲线坐标系 (ξ, η) 下可写成:

$$\Gamma \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\tilde{E} - \tilde{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F} - \tilde{F}_v)}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

这里 Γ 是预处理矩阵,它有多种选择,本文选取的矩阵为 Dailey^[2] 所采用的矩阵。方程(1)中:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{1}{J}(p, u, v, T)^T, \tilde{E} = \frac{1}{J}(\xi E + \xi F)^T, \tilde{F} = \frac{1}{J}(\eta E + \eta F)^T \\ E &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho w, (e + p)u)^T, F = (\rho v, \rho w, \rho v^2 + p, (e + p)v)^T \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} 1/T & 0 & 0 & -\rho/T \\ u/T & \rho & 0 & -\rho u/T \\ v/T & 0 & \rho & -\rho v/T \\ c_v + q/T & \rho u & \rho v & -\rho q/T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

\tilde{E}_v, \tilde{F}_v 为在一般曲线坐标系下的粘性项,具体表达式参见文献[3]。

状态方程为: $p = \rho RT, R = 1/(\gamma M_\infty^2), c_v = R/(\gamma - 1), q = (u^2 + v^2)/2, J$ 为雅可比行列式。

方程(1)已经无量纲化,无量纲参数选为“ ∞ ”参数。可以看出预处理后的方程与原来的NS方程并不相容,主要是时间导数项有变化。但对于定常问题来说,时间导数项最后趋于0,因此二者是相容的。矩阵 Γ 至少应保证正定、可逆^[4],因此对于适当的 Γ ,问题是适定的,与定常问题相容。

在这里,流动变量采用了原始变量 p, u, v, T ,而不是守恒变量,也不是基于密度 ρ 的变量,但方程仍是守恒型的方程。为什么要采用原始变量呢?主要是采用原始变量可更好地计算粘性项,且此时预处理矩阵可保持相对简单的形式^[1]。

1.2 方程的特征值

预处理后为了求得方程的特征值,如 ξ 方向的特征值,须写出 ξ 方向的雅可比矩阵 $A = \partial \tilde{E} / \partial \tilde{Q}$,然后求出 $\Gamma^{-1}A$ 的特征值。

$$A = \begin{bmatrix} \frac{U}{RT} & \rho \alpha_1 & \rho \alpha_2 & -\frac{\rho U}{T} \\ \frac{uU}{RT} + \alpha_1 & \rho(U + u\alpha_1) & \rho u \alpha_2 & -\frac{\rho u U}{T} \\ \frac{vU}{RT} + \alpha_2 & \rho v \alpha_1 & \rho(U + v\alpha_2) & -\frac{\rho v U}{T} \\ \frac{UH}{RT} & \rho(H\alpha_1 + uU) & \rho(H\alpha_2 + vU) & -\frac{\rho q U}{T} \end{bmatrix} \quad \Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q}{c_v} & -\frac{u}{c_v} & -\frac{v}{c_v} & \frac{1}{c_v} \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{q - c_v T}{\rho c_v} & -\frac{u}{\rho c_v} & -\frac{v}{\rho c_v} & \frac{1}{\rho c_v} \end{bmatrix}$$

这里 $U = \alpha_1 u + \alpha_2 v, \alpha_1 = \xi, \alpha_2 = \eta, H = \gamma c_v T + q$ 。令 $S^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$,则 $\Gamma^{-1}A$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = U, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}[(1 + 1/R)U \pm \sqrt{((1 - 1/R)U)^2 + 4\gamma TS^2}]$$

为了分析的方便,不妨令 $\alpha_1 = \xi = 1, \alpha_2 = \eta = 0$,则回到了原来的直角坐标系。此时有

$$\lambda_{1,2} = u, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}[(1 + 1/R)u \pm \sqrt{((1 - 1/R)u)^2 + 4\gamma T}]$$

当 $M_\infty \rightarrow 0$ 时, $1/R$ 为 $o(M_\infty^2)$ 的量级, 故 $\lambda_{3,4}$ 也是 u 的量级。所以, 预处理后方程的特征值具有相同的量级, 从而可使方程的求解收敛加快, 达到改变系统传输特性的目的。

同样, 对于 $B = \partial \tilde{F} / \partial \tilde{Q}$, 只要令 $\alpha_1 = \eta_x, \alpha_2 = \eta_y$, 便可得到与 A 相似的结论。

2 截断误差的控制^[3]

在低马赫数流动的计算中, 除了由于刚性问题引起收敛困难外, 另外一个问题就是截断误差引起收敛困难。由于 ρ 与 M_∞^{-2} 成正比, 当 $M_\infty < 0.001$ 时, 这将导致计算压力梯度时截断误差增加。注意到起作用的是压力梯度而不是压力, 因此这个问题可以通过引入一个常压力来得到解决, 即

$$p(\tau, \zeta, \eta) = \bar{p} + p'(\tau, \zeta, \eta)$$

这里 \bar{p} 是任意常量, 当然它最好能取 p 中不变的那部分。这样, 除质量方程、动量方程中的 p 用 p' 代替外, 能量方程不变, 其它的一些等式、矩阵都没有变化。

3 方程的离散和求解

3.1 LU-SGS 隐式求解

方程(1) 可用显式和隐式两种方法求解。显式求解一般用 Runge-Kutta(RK) 方法, 而隐式有 ADI、LU 方法。但显式求解要比隐式求解收敛慢, 因此本文采用收敛较快、容易实现的 LU-SGS 方法来求解。

对于控制方程(1), 用 LU-SGS 来求解时, 方程(1) 离散为

$$(L + D) D^{-1} (D + U) \Delta \tilde{Q} = -\Gamma^{-1} R \tag{3}$$

这里 A 的分裂与未预处理时有所不同, 因为这时包含了矩阵 Γ 的运算在里面。 A 的分裂步骤为:

$$\begin{aligned} A &= \Gamma \Gamma^{-1} A = \tilde{A}; & \tilde{A} &= \Gamma^{-1} A \\ \tilde{A} &= \tilde{A}^+ + \tilde{A}^-, & \text{而 } \tilde{A}^\pm &= \omega(\tilde{A} \pm \nu_A I) / 2 \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\nu_A = \alpha \cdot \max |\lambda_M|$, λ_M 是 \tilde{A} 的特征值, α, ω 是不小于 1 的松弛系数。于是

$$A^\pm = \omega(\Gamma \tilde{A} \pm \nu_A \Gamma) / 2 = \omega(A \pm \nu_A \Gamma) / 2 \tag{5}$$

A, B (分裂方法同 A) 的分裂完成后, 可按传统的 LU-SGS 方法求解。

3.2 显式部分的差分离散^[6]

Choi^[1] 认为, 如果无粘项应用基于通量差分裂(FDS) 的格式, 而不是基于矢通量分裂(FVS) 的格式, 预处理不影响原方程的定常解。目前还没有见到预处理方程的无粘项用 TVD 格式或基于矢通量分裂格式来离散的文章, 这说明 TVD 格式和基于矢通量分裂的格式运用到预处理还有一定的困难, 能不能用这些格式来求解目前还未有定论。当前最常见的格式当属一类中心差分格式, 如适用于预处理的修正 SLIP/ASLIP 格式以及中心差分格式加人工粘性, 而后者是目前应用得最多的格式。

ξ 方向的无粘数值通量为

$$\tilde{E}_{i+1/2,j} = (\tilde{E}_{i,j} + \tilde{E}_{i+1,j}) / 2 - d_{i+1/2,j} \tag{6}$$

而 $d_{i+1/2,j} = -k^{(4)} \Gamma_{i+1/2,j} \lambda_{+1/2,j} (\tilde{Q}_{i+2,j} - 3\tilde{Q}_{i+1,j} + 3\tilde{Q}_{i,j} - \tilde{Q}_{i-1,j})$
 $d_{i+1/2,j}$ 为 ξ 方向的四阶人工粘性(当流场有激波时, 还应加二阶人工粘性), 这里 $\Gamma_{i+1/2,j}, \lambda_{+1/2,j}$ 分别为 $(i+1, j)$ 和 (i, j) 两点的 Γ 矩阵及最大特征值的平均值。而 $k^{(4)}$ 为常数, 一般取为 $1/64$ 。

同样也可以写出 η 方向的数值通量, 这样

$$R = (\tilde{E}_{i+1/2,j} - \tilde{E}_{i-1/2,j}) + (F_{i,j+1/2} - \tilde{F}_{i,j-1/2}) - (D_\xi \tilde{E}_v + D_\eta \tilde{F}_v) \tag{7}$$

上式最后一项为粘性项, 处理较简单, 这里未写出。

4 结果分析

空腔流动作为计算低速(不可压) 流动的典型案例已有较长的历史。本文计算了不同来流马赫数

(从 4.5×10^{-4} 到 0.4)、不同雷诺数(从 100 到 10 000) 情况下的空腔流动, 空腔的展弦比为 1, 空腔顶盖以速度 $u_\infty = 1$ (无量纲) 运动。计算采用矩形网格, 网格有 $31 \times 31, 61 \times 61, 81 \times 81$ 三种, 后两种在壁面附近进行了加密。计算中取 $CFL = 5$ 。

图 1 是在 $Re = 100$ 时, 各种来流马赫数情况下预处理与没有预处理时计算的收敛历史比较图, 马赫数分别从 0.000 45 到 0.4。计算采用 31×31 的均匀网格。预处理计算时, 马赫数为 0.1、0.01、0.001、0.000 45 时收敛曲线基本重合在一起, 只有马赫数为 0.4 时有微小差别。与没有预处理的计算相比, 预处理确实加快了计算的收敛性。当 $M_\infty = 0.4$, 没有预处理时, 收敛性较好。然而随着马赫数下降(0.1), 收敛性就变差了。总体来说, 预处理要比没有预处理多收敛几个量级。而对于不同的来流马赫数, 预处理计算的收敛性是一样的, 与马赫数基本无关。

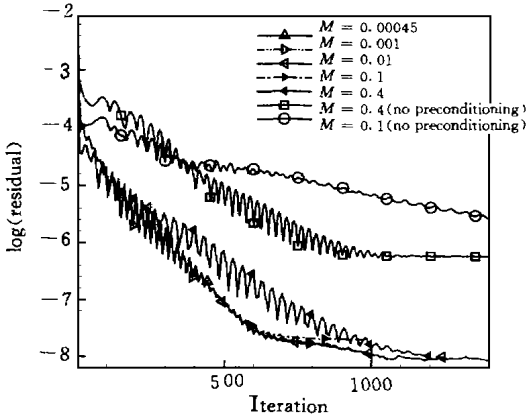


图 1 不同马赫数下有预处理与没有预处理计算的收敛曲线($Re = 100$)

Fig. 1 Convergence rates with and without preconditioning at different M ($Re = 100$)

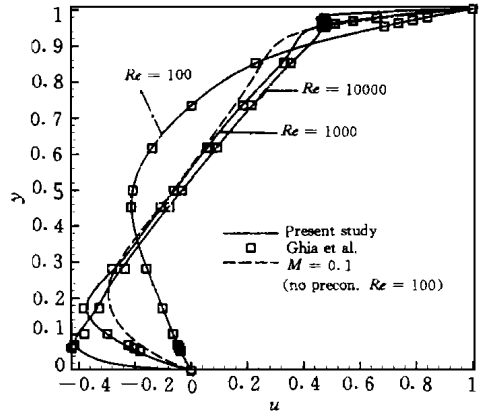


图 2 不同雷诺数下的预处理计算收敛曲线($M = 0.01$)

Fig. 2 Convergence rates with preconditioning at different Re ($M = 0.001$)

图 2 是不同雷诺数时预处理计算的收敛图, 其 $M_\infty = 0.001$ 。由图可知, 当雷诺数增大时, 收敛性有所下降。这可能是由网格的扭曲引起的。本文中雷诺数大于 400 时的计算网格全部在壁面加密。雷诺数大于 7 500 后, 收敛性较差, 我们认为, 这时流动状态可能已是呈现非定常的湍流, 计算时仍采用层流模型来计算, 显然不太合适。关于收敛性下降的问题, 我们认为并不是预处理方法本身引起的。

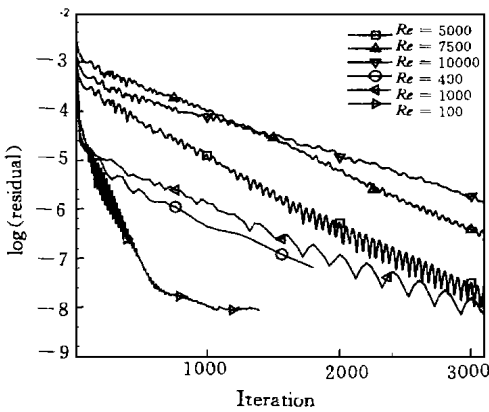


图 3 垂直中心线上的 u 分布图($M = 0.001$)

Fig. 3 The u velocity component at vertical centerline of cavity ($M = 0.01$)

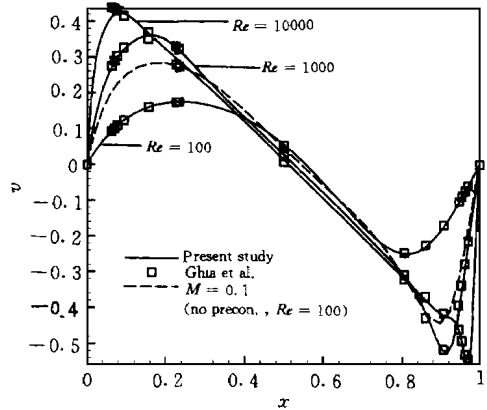


图 4 水平中心线上的 v 分布图($M = 0.001$)

Fig. 4 The v velocity component at horizontal centerline of cavity ($M = 0.001$)

图 3 和图 4 是 $M_\infty = 0.001$ 时, 不同雷诺数时在空腔的垂直中心线上的 u 分布图和水平中心线上的 v 分布图(只给出了 $Re = 100, 1000, 10000$ 三种结果)。 $Re = 100$ 时, 网格数为 31×31 (均匀)。 $Re = 400, 1000$ 时为 61×61 , $Re > 1000$ 时为 81×81 , 都在壁面进行了加密。和 Ghia et al.^[7] 的数值结果相比, 二者

符合得很好, 表明本文预处理计算的结果是可信的。值得一提的是, Ghia et al 采用了很密的网格 129×129 和 257×257 , 计算方法是涡一流函数法。经比较, 说明本文的计算效率是高的。而在低马赫数时, 没有经过预处理计算的结果与真实的结果有较大差异, 如图中 $M_\infty = 0.1$ 、 $Re = 100$ 时的情形。马赫数小于 0.1 的计算结果与真实解相差更大, 因此小于 0.1 时的结果本文没有给出。

图 5 是不同雷诺数时空腔流动的流线图。可看出, 在空腔的几何中心附近产生一个大涡, 而在底部两个角附近产生两个较小的二次涡。随着雷诺数的增大, 大涡的中心逐渐向空腔的几何中心移动, 而底部两角附近的二次涡也逐渐增大。当雷诺数为 5000 甚至更大时, 在左上角壁面附近也产生一个二次涡。

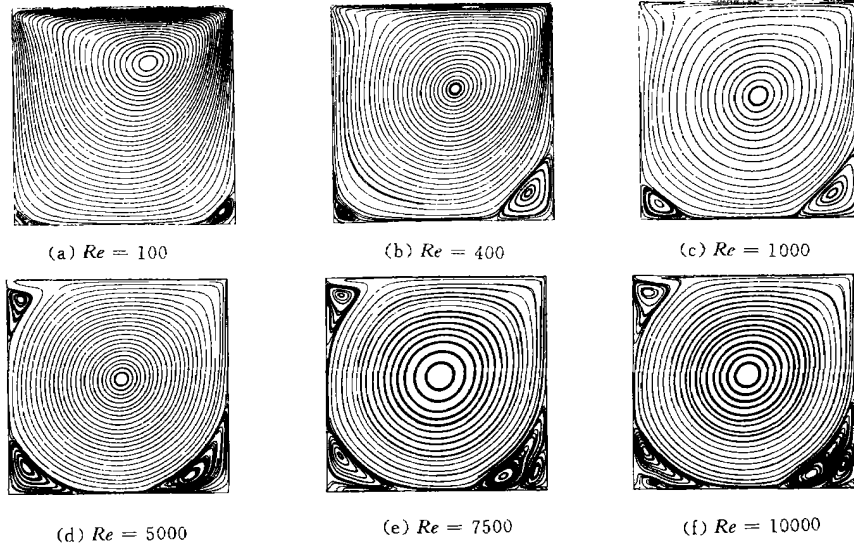


图 5 不同雷诺数下的流线图 ($M = 0.001$)

Fig. 5 Streamline contours for flow in a driven cavity at different Re ($M = 0.001$)

5 结束语

用预处理方法求解低速空腔粘性流动, 为低速不可压流场试验了一种新的计算方法。由于预处理矩阵只是在离散方程的左边起作用, 并且方程右边的显式无粘项采用中心差分格式加人工粘性进行离散, 因此得到的定常解与没有进行预处理得到的解相同甚至更好。通过计算不同雷诺数、不同马赫数时的空腔流场, 结果表明, 预处理方法加快了计算的收敛性, 使得用时间相关法计算流场的马赫数范围更宽, 可以从很低的马赫数到高超音速 (本文没有计算马赫数 0.4 以上的情况)。截断误差的控制通过引入一个常压力得到解决, 使得在马赫数低于 0.001 时同样具有较好的收敛性。计算结果表明计算的收敛性与马赫数基本无关。

参考文献:

- [1] Choi Y H, Merkle C L. The Application of Preconditioning in Viscous Flow [J]. J. Comput. Phys, 105, 1993.
- [2] Dailey L D, Pletcher R H. Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time Accurate Navier-Stokes Algorithms [J]. AIAA-95-1668.
- [3] Shun J S, Chen K H, Choi Y H. A Coupled Implicit Method for Chemical Non-equilibrium Flows at All Speeds [J]. J. Comput. Phys, 106, 1993.
- [4] Turkel E. The Review of Preconditioning. ADA-256622, 1992. 9.
- [5] Jameson Y S. A LU-SSOR Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations [J]. AIAA paper 87-600, 1987.
- [6] Chen K H, Shuen J S. Three Dimensional Coupled Implicit Methods for Spray Combustion Flow at all Speed [J]. AIAA paper 94-3047, Jun. 1994.
- [7] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method [J]. J. Comput. Phys. 1982, 48.