

快速设计月球卫星转移轨道的一种代数法^{*}

曾国强, 任 萱, 郝晓宁

(国防科技大学航天与材料工程学院 湖南 长沙 410073)

摘 要: 提出了一种将圆锥曲线拼接法与历表相结合, 快速设计月球卫星地月转移轨道的方法。此方法是一种无需轨道积分的纯代数计算方法, 具有速度快、精度高的特点, 可用于月球卫星转移轨道的初步设计。将初步设计获得的参数作为精确设计的初值, 能大大缩短精确轨道设计参数的时间。

关键词: 月球卫星; 轨道设计; 地月转移轨道; 圆锥曲线拼接法; 历表

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A

An Algebraic Method for Fast Design of Lunar Satellite Transfer Trajectory

ZENG Guo-qiang, REN Xuan, XI Xiao-ning

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defence Technology, Changsha 410073 China)

Abstract: A fast design method for the lunar satellite transfer trajectory is presented by combining patched-conic technique and ephemeris. This method is a pure algebraic method that doesn't need trajectory integral. It has the characteristics of rapidity and high accuracy, and can be used for preliminary design of the lunar satellite transfer trajectory. The time for precise trajectory design will be reduced greatly when parameters gotten from preliminary design is used as the initial value of precise design.

Key words: lunar satellite; trajectory design; earth-moon transfer trajectory; patched-conic technique; ephemeris

一条用于实际工程的月球卫星轨道, 对轨道计算的精度要求非常高, 对各种影响力都要进行精密的分析, 否则差之毫厘失之千里。此外由于月球卫星轨道的设计需要解两点边值问题, 设计一条轨道需要反复迭代搜索。因此月球探测器轨道的设计工作, 不但面对一个复杂的数学模型, 而且涉及到非常耗时的计算。为了使轨道设计工作达到事半功倍的效果, 在设计用于工程实际的轨道之前, 通常需要进行轨道的初步设计, 抓住影响轨道特性的主要因素, 进行初步分析、计算与设计。这对实际轨道的设计有重要的指导作用。本文采用圆锥曲线拼接法与历表相结合的方法, 进行月球卫星转移轨道的初步设计, 利用该方法可将二点边值问题化简为二次代数方程的求解问题, 从而实现月球卫星转移轨道的快速设计。另外, 初步设计得到的运动参数的值又可作为精确轨道计算时求解两点边值问题的迭代初值, 以减少迭代次数, 节约机时。

1 月球卫星轨道初步设计数学模型

1.1 简化假设

在进行初步分析时, 采用圆锥曲线拼接法来研究问题。该方法对问题进行了简化以突出其本质^{[1][2][3][4]}。其基本假设有: 近似认为地球和月球绕其公共质心作圆周运动, 地球—月球—探测器的运动为圆形限制三体问题; 当卫星在月球影响球之外时, 认为只受地球中心引力的作用, 其轨迹为地心圆锥曲线; 当卫星在月球影响球之内时, 认为只受月球中心引力的作用, 其轨迹为月心圆锥曲线; 在月球影响球边界, 将两条圆锥曲线拼接成完整的运动轨迹; 忽略太阳引力、地月摄动、光压摄动等次要因素的影响。

在双二体问题的假设下, 采用圆锥曲线拼接法可将满足技术要求的二点边值问题化简为二次代数

* 收稿日期: 1999-09-20

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (863-2-5-3-11a)

作者简介: 曾国强 (1973-), 男, 国防科技大学博士生。

方程的求解问题, 通过简单计算, 可求出月球卫星轨道的初始值。这一方法可为考虑摄动的数值积分解法提供初值, 并为探月轨道的特性提供了一个简要的说明。



图1 地月转移轨道示意图

Fig. 1 Sketch of earth-moon transfer trajectory

从地面发射月球卫星转移轨道的大致情况如图1所示。首先, 从地面发射场发射至低轨地球停泊轨道入轨点(0点); 然后, 在停泊轨道上滑行到适当位置(1点)加速进入地月转移轨道; 接着, 在地月转移轨道近月点(2点)减速成为月球卫星。设计月球卫星轨道也就是要确定月球卫星转移轨道的入轨时刻 T_L 、从点0到点1的滑行时间 T_S 以及月球卫星在点1获得的转移初速 V_{10} 。

1.2 白道坐标系与月球探测器轨道参数

如图2所示, $o-xyz$ 为月心白道坐标系, 它取探测器进入月球影响球时刻的白道面为基本平面, o 为月心, ox 轴由地球指向月球, oz 轴垂直白道面, 方向同月球绕地球公转动量矩方向, oy 轴与二者构成右手系。

探测器到达月球影响球时可能处于月球卫星轨道的升段(图2(a)所示), 也可能处于月球卫星轨道的降段(图2(b)所示)。

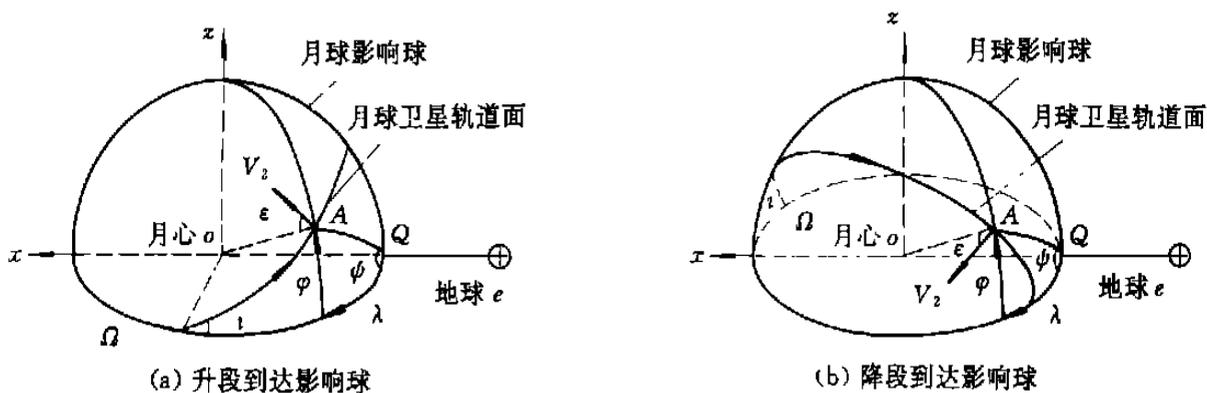


图2 月球卫星轨道示意图

Fig. 2 Sketch of lunar satellite orbit

A 点为地月转移轨道与月球影响球的交点(下称入口点), λ, φ 为定义在白道基准面的 A 点经纬度, i 为月球卫星轨道倾角, ϵ 为入口点 A 处探测器相对月球速度矢量与探测器的位置矢量反方向夹角。并设月球卫星轨道近月距 r_p , 月球影响球半径为 ρ , 探测器近地距为 r_{10} , 地月距为 R_d 。

1.3 计算对月需要速度方向 V_{2L}

给定转移轨道的近地距 r_{10} 、A 点的经纬度 λ, φ 、月心轨道倾角 i 、升段或降段到达 A 点以及夹角 ϵ 后, 可以求出月球卫星在 A 点对月需要速度的方向。为此, 引入如下变量:

A 点的地心矢为 r_2 、其大小为 r_{20} ; A 点月心速度矢为 V_{2L} ; A 点地心速度矢为 V_2 、其大小为 v_{20} ; $Aoe = \delta$; $Aeo = \gamma$; 平面 oAQ 与 xoy 的二面角为 ψ , 月球卫星轨道升交点经度 Ω , 升交点到 A 点的

角距为 l (逆向为正), 停泊轨道加速处飞行方向角 β_1 , A 点飞行方向角 β_2 , 则:

$$\delta = \arccos(\cos\varphi \cos\lambda) \quad (0 < \delta < \pi) \quad (1)$$

$$\psi = \arcsin(\sin\varphi \sin\delta) \quad (-\pi/2 < \psi < \pi/2) \quad (2)$$

$$l = \begin{cases} \arcsin(\sin\varphi \sin i) & \text{升段到达} \\ \pi - \arcsin(\sin\varphi \sin i) & \text{降段到达} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sin\gamma = \rho \sin\delta / r_{20} \quad (4)$$

在白道系 $o - xyz$ 中:

$$\text{月球公转速度: } \mathbf{V}_L = (0, V_L, 0)^T \quad (5)$$

$$\text{A 点地心距: } r_{20} = \sqrt{R_d^2 + \rho^2 - 2R_d \rho \cos\delta} \quad (6)$$

$$\text{A 点地心矢量: } \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{20} \cos\gamma \\ r_{20} \sin\gamma \cos\psi \\ r_{20} \sin\gamma \sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ e_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{A 点对地速度矢量: } \mathbf{V}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})^T \quad (8)$$

升段到达时升交点经度:

$$\Omega = \begin{cases} \pi - \lambda - \arccos(\cos l / \cos\varphi) & \text{sign}(\varphi) (i < \pi/2) \\ \pi - \lambda + \arccos(\cos l / \cos\varphi) & \text{sign}(\varphi) (i > \pi/2) \end{cases}$$

降段到达时升交点经度:

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi - \lambda + \arccos(\cos l / \cos\varphi) & \text{sign}(\varphi) (i < \pi/2) \\ 2\pi - \lambda - \arccos(\cos l / \cos\varphi) & \text{sign}(\varphi) (i > \pi/2) \end{cases} \quad (9)$$

因此, A 点对月需要速度单位矢量为:

$$\mathbf{V}_{2L}^0 = \mathbf{M}_z[-\Omega] \mathbf{M}_x[-i] \mathbf{M}_z[-(l + \pi - \epsilon)] (1, 0, 0)^T = (a_0, b_0, c_0)^T \quad (10)$$

$$\text{当轨道倾角 } i = 0 \text{ 时, } \mathbf{V}_{2L}^0 = (\cos(\epsilon + \lambda), -\sin(\epsilon + \lambda), 0)^T \quad (11)$$

$$\text{当轨道倾角 } i = \pi \text{ 时, } \mathbf{V}_{2L}^0 = (\cos(\epsilon - \lambda), \sin(\epsilon - \lambda), 0)^T \quad (12)$$

1.4 由入口点 A 参数的关系求解转移轨道参数

入口点 A 处的对月速度: $\mathbf{V}_{2L} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_L$ 与矢量 \mathbf{V}_{2L}^0 平行, 即:

$$\frac{a_0}{v_{2x}} = \frac{b_0}{v_{2y} - V_L} = \frac{c_0}{v_{2z}} \quad (13)$$

$$\text{可得: } v_{2z} = c_0 v_{2x} / a_0 - m_0 v_{2x} \quad (14)$$

$$v_{2y} = V_L + b_0 v_{2x} / a_0 - V_L + n_0 v_{2x} \quad (15)$$

$$\text{在地心段, 由能量守恒得: } V_{20}^2 = V_{10}^2 + 2\mu_e (1/r_{20} - 1/r_{10}) \quad (16)$$

$$\text{在地心段, 由动量矩守恒得: } r_{10} V_{10} \sin\beta_1 = r_{20} V_{20} \sin\beta_2 \quad (17)$$

$$\cos\beta_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{V}_2 / (r_{20} V_{20}) \quad (18)$$

因 $\sin^2\beta_2 + \cos^2\beta_2 = 1$, 有:

$$\left(\frac{r_{10} V_{10} \sin\beta_1}{r_{20} V_{20}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{V}_2}{r_{20} V_{20}} \right)^2 = 1 \quad (19)$$

$$\text{即: } r_{10}^2 V_{10}^2 \sin^2\beta_1 + q_0 v_{2x}^2 + t_0 v_{2x} + u_0 = 0 \quad (20)$$

其中:

$$g_0 = e_0 V_L, \quad h_0 = e_0 n_0 + d_0 + f_0 m_0, \quad s_0 = 2V_L n_0, \quad (21)$$

$$p_0 = 1 + m_0^2 + n_0^2, \quad t_0 = 2g_0 h_0 - r_{20}^2 s_0, \quad u_0 = g_0^2 - r_{20}^2 V_L^2, \quad (22)$$

$$q_0 = h_0^2 - r_{20}^2 p_0 \quad (23)$$

$$\text{记: } Q = 2\mu_e (1/r_{20} - 1/r_{10}) \quad (24)$$

$$\text{则 (16) 化为: } V_{10}^2 = p_0 v_{2x}^2 + s_0 v_{2x} - Q + V_L^2 \quad (25)$$

$$\text{将 (25) 代入 (20) 得: } A v_{2x}^2 + B v_{2x} + C = 0 \quad (26)$$

其中:

$$A = (r_{10} \sin \beta_1)^2 p_0 + q_0, \quad (27)$$

$$B = (r_{10} \sin \beta_1)^2 s_0 + t_0, \quad (28)$$

$$C = u_0 - (r_{10} \sin \beta_1)^2 (Q - V_L^2) \quad (29)$$

由(26)可以求出 v_{2x} (v_{2x} 有两解, 较大的对应地球停泊轨道倾角大于 90° 情况, 较小的对应地球停泊轨道倾角小于 90° 情况, 从节省能量角度来讲, 应取较小的 v_{2x}), 进而由(14)、(15) 求出 v_{2y}, v_{2z} , 得到 A 点探测器对地心速度矢量 $V_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})^T$ 、对月心速度矢量 $V_{2L} = V_2 - V_L$ 和对月位置 r_{2L} 。

求出 A 点的地心矢量 r_2 、地心速度矢量 V_2 后, 可以由下面两式求出加速点的地心矢量 r_1 、地心速度矢量 V_{10} ^[5]:

$$r_{10} = \left[1 - \frac{r_{10}}{P} (1 - \cos df) \right] r_{20} + \frac{r_{10} r_{20}}{\mu_e P} \sin df V_2 \quad (30)$$

$$V_{10} = \left[\frac{r_2 V_2}{P r_{20}} (1 - \cos df) - \frac{1}{r_{20}} \frac{\mu_e}{P} \sin df \right] r_{20} + \left[1 - \frac{r_{20}}{P} (1 - \cos df) \right] V_2 \quad (31)$$

其中: df 为近地点 1 与入口点 A 的真近点角之差。

至此, 给定月球卫星的近地距 r_{10} 、升段或降段到达入口点 A、A 点的经纬度 λ, φ 地月距为 R_d 、月心轨道倾角 i 以及月球卫星在入口点处对月速度与月心矢反方向夹角 ϵ 时, 可以利用解析公式求出地心轨道转移初速 V_{10} 、加速点矢径 r_{10} 、近月距 r_p 以及飞行时间等参数。由于给定的夹角 ϵ 下求出的近月距 r_p 不一定满足要求, 因此需要对夹角 ϵ 进行一维搜索, 使近月距满足要求。

1.5 求解探测器对地球赤道和月球赤道参数

前面的讨论都基于白道平面, 因此求出的 r_{10} 、 V_{10} 、 r_{2L} 和 V_{2L} 也是以月心白道坐标系 $o - xyz$ 的分量来表示的。地球停泊轨道倾角是相对地球赤道平面、月球卫星相对月球赤道平面, 所以要引入白道的以下参数: 白道对地球赤道倾角 i_m 、白道升交点赤经 Ω_m 、月球对升交点角距 u_m 。引入这三个参数后, 近地点对地参数在 J2000 地心天球坐标系中分量为:

$$\text{位置: } M_z[-\Omega_m] M_x[-i_m] M_z[-u_m] r_{10}$$

$$\text{速度: } M_z[-\Omega_m] M_x[-i_m] M_z[-u_m] V_{10}$$

为求卫星对月球赤道参数, 还需要引入从 J2000 坐标系到月球赤道坐标系的转换矩阵 M_{2000} , 该矩阵可由历表查出。故入口点参数在月球赤道坐标系分量为:

$$\text{位置: } M_{2000} M_z[-\Omega_m] M_x[-i_m] M_z[-u_m] r_{2L}$$

$$\text{速度: } M_{2000} M_z[-\Omega_m] M_x[-i_m] M_z[-u_m] V_{2L}$$

这样, 就可以求出停泊轨道对地球赤道的倾角 i_b 、停泊轨道升交点经度 Ω_b 、加速点 1 对停泊轨道升交点角距 u_1 、点 1 的转移初速 V_{10} 和探测器对月球赤道的倾角 i_m 、近月距 r_p 等参数^[6]。设实际入轨点地理经度 L_0 、地理纬度 ϕ 、停泊轨道倾角为 i_0 、卫星从停泊轨道降段入轨, 要求的月球卫星对月球赤道倾角为 i_{mr} 、近月距 r_{pr} 。因为一个 u_m 对应着唯一的入口点时刻 T_A (在指定的月份内), 故给定 u_m 后, 通过搜索就可以求出一条轨道满足约束: $i_{tb} = i_0, i_m = i_{mr}, r_p = r_{pr}$ 。对于这条轨道, 可以容易地求出参数 T_L, T_S :

$$T_S = T_{tb} (u_1 - \pi + \arcsin(\sin(\phi) / \sin(i_0))) / 2\pi$$

$$T_L = T_A - T_{1A} - T_S$$

其中, T_{tb} 为停泊轨道周期, T_{1A} 为探测器从加速点 1 飞至入口点 A 的时间。

最后, 从地理经度 L_0 入轨的倾角为 i_0 的停泊轨道的升交点经度 Ω 为:

$$\Omega = \pi + \Theta_g(T_L) + L_0 + \arcsin(\operatorname{tg} \phi / \operatorname{tg} i_0) \quad (\Theta_g \text{ 为格林尼治恒星时})$$

如果 $\Omega_b = \Omega$, 那么求出的这条轨道就是符合所有约束条件的月球卫星转移轨道。如果 $\Omega_b \neq \Omega$, 则需要调整 u_m (与入口点时刻 T_A 对应), 使该约束得以满足。

2 计算结果及分析

2.1 不同入口点位置对转移初速 V_{10} 的影响

根据上面的简化数学模型, 计算不同入口点经纬度下近月距为 500 km 的极月卫星转移轨道 ($i_{mr} = 90^\circ$) 的轨道参数。结果如表 1 所示。

表 1 入口点对轨道参数的影响

Tab. 1 Influence of entrance point on transfer trajectory parameters

入口点经度 ($^\circ$)	入口点纬度 ($^\circ$)	转移初速 (m/s)	近月点速度 (m/s)	飞行时间 (h)
30.0	0.0	10 968.8	2 481.7	58.28
50.0	0.0	10 924.6	2 269.6	82.25
70.0	0.0	10 916.0	2 222.1	105.94
30.0	- 1.0	10 971.2	2 497.3	57.64
50.0	- 1.5	10 925.1	2 278.1	81.63
70.0	- 1.9	10 916.1	2 229.4	105.45
30.0	- 2.0	10 975.1	2 522.3	56.66
50.0	- 3.0	10 926.0	2 291.5	80.66
70.0	- 3.8	10 916.2	2 241.1	104.67

从表 1 可见, 入口点的位置对转移轨道特性有较大的影响:

1) 入口点越接近西经 90° , 转移初速和近月点速度越小, 其影响达到几十米/秒的量级。因为成为月球卫星还需要把近月点的速度减小到圆轨道速度, 因此转移初速和近月点速度的减小意味着成为月球卫星所需的能量减少;

2) 入口点纬度对转移初速的影响在几米/秒的量级;

3) 入口点经度越大, 需要的转移初速越小, 所需的飞行时间越长。

由此可见: 从节省发射能量的角度出发, 月球卫星转移轨道在月球影响球入口点的位置要尽量接近西经 90° 。但如果对飞行时间有限制的话, 则要综合两个因素的影响, 采取折衷的方法来确定入口点经度。

2.2 初步设计与精确设计比较

考虑近月点高度为 300、500、1000 km 的极月卫星转移轨道, $i_0 = 43^\circ$, $\phi = 33.7^\circ$; 到达入口点时刻在 1997 年 6 月 22 日左右。首先, 由历表查出 $i_m = 18.46^\circ$, $\Omega_m = 1.84$, 并视该日的从 J2000 坐标系到月球赤道坐标系的转换矩阵 M_{2000} 为不变矩阵, 用该日的地月距离作为 R_{eL} 的值, 经搜索得表 2。

从表 2 可见: 快速设计法初步设计出的参数 T_L 、 T_S 和 V_{10} 与考虑各种摄动因素影响的精确轨道设计出的真实参数有惊人的接近。探测器在停泊轨道上的滑行时间 T_S 相差在 3s 左右, 入轨时刻相差在 10min 左右。入轨时刻的偏差主要是由于初步设计中的飞行时间比精确设计中的长而引起的。知道这个特点后, 在精确设计中以初步设计的参数为初值, 先对入轨时刻进行搜索, 就可以很快获得精确的参数 T_L 、 T_S 和 V_{10} 。

表2 初步设计与精确设计结果比较

Tab. 2 comparison of preliminary design and precise design results

V_{10}	h_p	初步设计		精确设计	
		T_L (格林威治时间)	T_s	T_L (格林威治时间)	T_s
10 920	300	97-6-20-4-37-53.51	554.88	97-6-20-4-49-20.00	556.55
10 920	500	97-6-20-4-37-43.10	555.82	97-6-20-4-48-50.00	557.30
10 920	1 000	97-6-20-4-37-04.41	558.05	97-6-20-4-48-15.81	559.55
10 930	300	97-6-20-4-20-16.78	561.96	97-6-20-4-27-20.00	560.00
10 930	500	97-6-20-4-20-11.81	563.01	97-6-20-4-27-14.95	561.06
10 930	1 000	97-6-20-4-19-39.43	565.01	97-6-20-4-26-35.00	563.15
10 950	300	97-6-20-4-00-33.12	582.79	97-6-20-4-05-12.42	579.34
10 950	500	97-6-20-4-00-22.88	583.64	97-6-20-4-05-04.13	580.26
10 950	1 000	97-6-20-4-00-06.55	585.58	97-6-20-4-04-33.90	582.17

3 结论

在进行月球卫星轨道的初步设计时,完全可以利用圆锥曲线拼接法和精确历表相结合的快速设计法。利用它可以搜索出满足停泊轨道倾角、近地距、入轨点经纬度和月球卫星倾角、近月距的地月转移轨道。它是一种无需轨道积分的纯代数计算方法,具有计算速度快、精度高的特点。通过大量计算表明:在奔腾 233 机器上,搜索一条从指定发射场入轨、给定的停泊轨道倾角、近地距、近月距、月球卫星倾角的地月转移轨道的参数 T_L 、 T_s 和 V_{10} 仅需几十秒。而在考虑 6^*6 阶地球摄动的精确摄动模型下,搜索一条满足上述约束的转移轨道需要几十分钟;在考虑 50^*50 阶地球摄动的精确摄动模型下,搜索一条满足上述约束的转移轨道则需要几小时。如果将初步设计的结果作为精确设计的初值,则可以大大缩短搜索时间。将初步设计结果作为 6^*6 阶地球摄动的精确摄动模型下的初值,搜索时间在十分钟以下,约节省 70% 以上的计算时间。并且,利用初步设计,可以进行大量计算,分析各种地月转移轨道的特性。

参考文献:

- [1] 任萱, 陈建祥. 垂直着月轨道的特性分析及其近似解 [J]. 国防科技大学学报, 1997, 19 (6): 1~8.
- [2] Robert H T. Geometrical Characteristics of Lunar Orbits Established from Earth-Moon Trajectories [R]. NASA TN D-1780: 1~20.
- [3] 易照华, 赵德滋. 击中月球的火箭轨道设计问题 [J]. 南京大学学报, 1964, 8 (3): 367~375.
- [4] 易照华, 朱耀鑫. 击中月球火箭的月面击中点分布问题 [J]. 南京大学学报, 1964, 8 (4): 481~492.
- [5] BATE R R. 航天动力学基础 [M]. 吴鹤鸣, 李肇杰译. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1990.
- [6] 曾颖超主编. 航天器飞行力学 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1993.
- [7] 任萱. 人造地球卫星轨道力学 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988: 170~178.
- [8] 肖峰. 球面天文学与天体力学基础 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989: 145~148.