第22卷 第2期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 22 No. 2 2000

文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0011-04

子弹散布中心正态总体分布参数的融合估计*

夏胜平[1], 谢红卫[1], 万 波[2], 曹国敏[2]

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙, 410073; 2. 北京市142信箱206分箱, 北京, 100854)

摘 要: 对带有均匀抛撒子弹头的常规导弹的命中精度评定, 其关键在于子弹散布中心分布参数的准确估计。通常的方法由每次试验的子弹落点数据获得一个子弹散布中心, 再由少数的几个散布中心数据、运用经典的统计方法求散布中心的正态总体分布参数, 其不足之处在于小样本条件下采伪的概率很高。考虑到子弹散布中心只是子弹落点数据的一阶矩, 并不能充分表达子弹落点数据所蕴含的信息量, 而子弹落点个数远远大于导弹试验的次数, 子弹落点所蕴含的信息比子弹散布中心所蕴含的信息要丰富得多。鉴于此, 研究了一种子弹散布中心总体分布参数融合估计的新方法。

关键词: 散布中心; 小子样; 命中精度; 融合估计

中图分类号: TP202 文献标识码: A

Fusion Estimation of Normal Distribution Parameter of the Sub-missile Dispersion Center

XIA Sheng-ping, XIE Hong-wei

College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

WAN Bo, CAO Guo-min

(Beijing 142 P. O Box 206 sub-box, Beijing, 100854)

Abstract: On evaluating the hitting precision of a missile which throws sub-missiles, it is a key question to estimate the normal distribution parameter of the sub-missile dispersion center. The usual method is, to find a sub-missile disper firstsion center first from each group data of the sub-missile′s falling point coordinate, then to estimate the parameters according to a few data of dispersion center using the classical statistic method. Its shortcomings are the high probability to make a wrong conclusion. Considering that the sub-missile dispersion center, which cannot sufficiently express the information contained in the sub-missile falling point data group, is only its first moment, in this paper a new method on fusion estimating the distribution parameter is researched.

Key words: dispersion center; small sample; circular error probability (CEP); fusion estimation

对带有均匀抛撒子弹头的常规导弹, 命中精度CEP是一项重要的战术性能指标。因此, 命中精度的评定是定型试验鉴定的重要内容之一。而命中精度评定的关键步骤是子弹散布中心分布参数的准确估计。常用的方法如GJB3105-97“命中精度评定方法”, 对每一组子弹落点只利用了其子弹散布中心这组数据, 之后便将子弹落点的原始信息抛弃了。通常, 由于飞行试验受到经济、安全等因素的限制, 不能用较大样本进行飞行试验, 甚至用通常的小样本进行试验也感到力不从心, 一般只能作屈指可数的几发试验。若在进行命中精度评定时只采用子弹散布中心数据, 则命中精度的评定是极小子样命中精度评定。众所周知, 极小子样条件下所作的结论要冒很大的风险[1,2], 因而对带子弹头常规导弹命中精度评定时必须寻求新的方法来进行参数估计。

导弹试验子弹落点个数远远大于导弹试验次数, 其所含的信息量远超过单一的子弹散布中心所包含的信息量。原因就在于子弹散布中心只是子弹落点数据的一阶矩, 并不能完全表达子弹落点数据所蕴含的信息量。若从散布中心出发进行命中精度评定, 显然没有充分利用子弹落点信息。因此, 子母弹的小样本试验并不等同于单弹头导弹的小样本试验, 从这一思考出发, 本文中借助于自助[3,4,5]参数统计方法, 研究了一种子弹散布中心总体分布参数融合估计的新方法。

* 收稿日期: 1999-09-20
作者简介: 夏胜平 (1969-), 男, 博士后, 国防科技大学讲师。

1　利用一次试验子弹落点数据自助确定子弹散布中心的分布

设进行子弹抛撒的试验次数为 n, 每次试验有一组子弹纵横向落点偏差数据 ΔL_i、ΔH_i, 设:

$\Delta L_i \equiv (\Delta L_{i1}, \Delta L_{i2}, \cdots, \Delta L_{in_i})$, $\Delta H_i \equiv (\Delta H_{i1}, \Delta H_{i2}, \cdots, \Delta H_{in_i})$, 且令:

$\Delta X_i = (\Delta L_i, \Delta H_i)^T$,

其中: ΔL_{ij} 表示第 i 次试验第 j 子弹纵向落点偏差;

ΔH_{ij} 表示第 i 次试验第 j 子弹横向落点偏差;

ΔX_i 表示第 i 次试验得到的数据; "T"表示转置;

$i = 1, 2, \cdots, n$, n 为试验次数;

n_i 表示第 i 次试验获取的有效的子弹落点数据个数。

通常导弹散布中心服从正态分布 $\mathrm{N}((\mu_{\Delta L}, \mu_{\Delta H})^T, \mathrm{diag}(\sigma^2_{\Delta L}, \sigma^2_{\Delta H}))$, $\mu_{\Delta L}, \mu_{\Delta H}, \sigma^2_{\Delta L}, \sigma^2_{\Delta H}$ 为待估参数; 设 $\theta \in \{\mu_{\Delta L}, \mu_{\Delta H}, \sigma^2_{\Delta L}, \sigma^2_{\Delta H}\}$, $\pi(\theta)$ 表示 θ 的分布, $\pi(\theta\ \ )$ 表示 θ 的条件分布。若 ΔX 表示全部子弹落点数据, ΔX_0 表示由子弹落点确定的子弹散布中心, 则有:

$$\pi(\theta \mid \Delta X) \neq \pi(\theta \mid \Delta X_0) \tag{1}$$

我们认为 ΔX 蕴含的信息量比 ΔX_0 蕴含的信息量大, 因此 $\pi(\theta)$ 的估计应该从 ΔX 出发, 而不应该从 ΔX_0 出发, 即求 $\pi(\theta \mid \Delta X)$, 要求 $\pi(\theta \mid \Delta X)$, 需先求 $\pi(\theta \mid \Delta X_i)$。下面, 我们给出求解的基本过程。

为确定子弹散布中心的分布, 首先由 ΔH_i 和 ΔL_i 确定子弹散布中心 $\overline{\Delta H_{i0}}$ 和 $\overline{\Delta L_{i0}}$:

Step 1　确定子弹散布中心

a. 求出所有子弹散布的几何中心 O_1 的纵、横向坐标: $\Delta X_{i0} = (\overline{\Delta L_{i0}}, \overline{\Delta H_{i0}})^T$.

$$\overline{\Delta L_{i0}} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} \Delta L_{ij} \tag{2}$$

$$\overline{\Delta H_{i0}} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} \Delta H_{ij} \tag{3}$$

b. 求所有子弹到散布中心 O_1 的距离 d_j, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, 及 d_j 的均值 $\bar{d}$ 和样本方差 S_i;

c. 令 $\Delta d_j = d_j - \bar{d}$, 求出 Δd_j 的最大者 $\Delta d_{\max}$;

d. 若 $\Delta d_{\max} \geq K_s * S_i$($K_s$ 取 3), 则剔除该子弹, 然后重复 a 至 d 项, 直到条件 $\Delta d_{\max} \geq K_s * S$ 不再满足或剔除的子弹数据超过规定的最大数量;

e. 求出剔除野弹后的子弹坐标中心 o, 则点 o 为子弹落点散布中心, 其坐标参数 j, 记作: $\theta = (\Delta L_0, \Delta H_0)^T$。

Step 2　由 $\Delta X_i = (\Delta L_i, \Delta H_i)^T$ 产生 m 组自助子样, $(\Delta L^*_{ij1}, \Delta L^*_{2ij} \cdots \Delta L^*_{ijn_i}) \equiv \Delta L^*_{ij}$, $(\Delta H^*_{ij1}, \Delta H^*_{2ij} \cdots \Delta H^*_{ijn_i}) \equiv \Delta H^*_{ij}$, $j = 1, 2, \cdots, m$; 并利用 *Step* 1 中的方法由(2)、(3) 式确定 $\overline{\Delta H^*_{ij0}}$, $\overline{\Delta L^*_{ij0}}$, $j = 1, 2, \cdots, m$;

Step 3　由 $\overline{\Delta H^*_{ij0}}$ 和 $\overline{\Delta L^*_{ij0}}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, 确定 $\theta = (\Delta L_0, \Delta H_0)^T$ 的自助分布, 记作 $\pi(\theta \mid \Delta X_i)$。

2　子弹散布中心分布的融合估计

设 $\pi(\theta \mid \Delta X_i)$ 为由第 i 发导弹试验数据求得的自助分布, 记 $\Delta X = (\Delta X_1, \Delta X_2, \cdots \Delta X_n)$ 为 n 次试验的子弹落点数据, 则以 $\pi(\theta \mid \Delta X_i)$ 作为验前分布, 运用如下的 Bayes 公式求 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$:

$$\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X) = \frac{\pi(\theta \mid \Delta X_i)\ p(\Delta X \mid \theta)}{\int_{\Theta} p(\Delta X \mid \theta)\ \pi(\theta \mid \Delta X_i)(\mathrm{d}\theta)} \tag{4}$$

其中: $p(\Delta X \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\Delta X_i \mid \theta)$ 表示 ΔX 以 θ 为散布中心时的散布均匀性度量指标;

$p(\Delta X_i \mid \theta)$ 表示 ΔX_i 以 θ 为散布中心时的散布均匀性度量指标;

$\prod_{i=1}^{n} p(\Delta X_i \mid \theta)$ 表示 $\Delta X = (\Delta X_1, \Delta X_2, \cdots \Delta X_n)$ 以 θ 为散布中心时的散布均匀性度量指标。

下面，求子弹落点相对于散布中心的散布均匀性指标[6]。

设散布中心为 $\theta = (\Delta L_0, \Delta H_0)^T$，子弹落点数据为 $(\Delta L_{ij}, \Delta H_{ij})\, j = 1, 2, \cdots N_i$，则以 $\theta = (\Delta L_0, \Delta H_0)^T$ 为中心将平面分成 6 部分如图 1 所示。

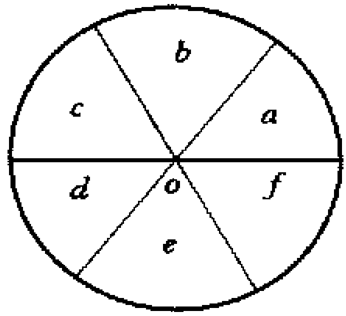

图 1　散布均匀性分区示意图

Fig. 1　Disperse Partition Diagram

由子弹散布均匀性可知：任一子弹落入某一指定扇形区域的概率为 $P = 1/6$，落入其它区域的概率为 5/6，则

$$
\begin{aligned}
p_a(k_a) &= C_{N_i}^{k_a} p^{k_a} q^{N_i - k_a} \\
p_b(k_b) &= C_{N_i}^{k_b} p^{k_b} q^{N_i - k_b} \\
&\cdots \\
p_f(k_f) &= C_{N_i}^{k_f} p^{k_f} q^{N_i - k_f}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $k_a + k_b + \cdots + k_f = N_i, p + q = 1, p = 1/6, q = 5/6$;

其散布均匀性度量指标为

$$
p(\Delta X_i \mid \theta) = p_a(k_a) * p_b(k_b) * \cdots p_f(k_f) \tag{6}
$$

ΔX 相对于 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 的边缘分布密度函数为

$$
\begin{aligned}
m(\Delta X \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)) &= \int_{\Theta} p(\Delta X \mid \theta) \quad \pi(\theta \mid \Delta X)\, d\theta \\
&= \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} p(\Delta X_i \mid \theta) \quad \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)\, d\theta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

综上可求 $\pi(\theta \mid \Delta X)$ 的融合估计：

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta \mid \Delta X) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (m(\Delta X \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)) \quad \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))}{\sum_{i=1}^{n} m(\Delta X \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中：$\lambda_i = \dfrac{m(\Delta X \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))}{\sum_{i=1}^{n} m(\Delta X \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

在此基础上求 $\pi(\theta \mid \Delta X)$ 正态总体分布参数 $(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = \left((\hat{\mu}_{\Delta L}, \hat{\mu}_{\Delta H})^T, \mathrm{diag}(\hat{\sigma}^2_{\Delta L}, \hat{\sigma}^2_{\Delta H}) \right)$;

设 θ 的最小方差估计 $\hat{\theta}_{MV}$ 为

$$
\hat{\theta}_{MV} = E^{\pi(\theta \mid \Delta X)}\{\theta\} \tag{9}
$$

则有：

$$
\hat{\theta}_{MV} = E^{\pi(\theta \mid \Delta X)}\{\theta\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad E^{\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)}\{\theta\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \hat{\theta}^{(i)}_{MV} \tag{10}
$$

对分布参数 $(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ 只需将 θ 以相应的待求参数 $\hat{\mu}_{\Delta L}, \hat{\mu}_{\Delta H}, \hat{\sigma}^2_{\Delta L}, \hat{\sigma}^2_{\Delta H}$ 代入以上各步分别求解。

3　母弹头落点观测数据与子弹散布中心自助分布的数据融合

在飞行试验阶段，其中有 k 次试验没有使用子弹头，而只有母弹头落点数据，此时无法求该次试验相应的子弹散布中心的自助分布，但是很直观的思路就是应该综合利用这类试验信息。

设现已求得 n 次子弹散布中心的自助分布 $\pi(\theta \mid \Delta X_i), i = 1, 2, \cdots, n$，并求得相应的自助验后分布 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$，另有 k 个母弹头落点数据 $\Delta X_j' = (\Delta L_j, \Delta H_j)^T, j = 1, 2, \cdots, k$，已知 $n \in \{3, 4\}$。现求正态总体分布 $\pi(\theta \mid \Delta X)$ 及其分布参数 $(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$。

此处，仍采用加权融合估计方法。试想，如果 $\Delta X_j', j = 1, 2, \cdots, k$ 来源于分布 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$，则 $\Delta X' =$

$(\Delta X_1', \cdots, \Delta X_k')$ 相对于 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 的似然函数值较大,而 $\Delta X' = (\Delta X_1', \cdots, \Delta X_k')$ 对不同的 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 有不同的似然函数值,这就是我们对 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 进行融合估计时构造加权系数的出发点。

设
$$f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)) = \prod_{j=1}^{k} f(\Delta X_j' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)) \tag{11}$$

其中: $f(\Delta X_j' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))$ 表示 $\Delta X_j'$ 在自助分布 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 上的密度函数值,

$f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))$ 表示 $\Delta X' = (\Delta X_1', \cdots, \Delta X_k')$ 对 $\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$ 的似然函数值;

则
$$\pi(\theta \mid \Delta X) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)) \cdot \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X) \right)}{\sum_{i=1}^{n} f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))} \tag{12}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)$$

其中: $\lambda_i' = \dfrac{f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))}{\sum_{i=1}^{n} f(\Delta X' \mid \pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X))}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' = 1$

最后,同理可得:
$$\hat{\theta}_{MV} = E^{\pi(\theta \mid \Delta X)}\{\theta\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot E^{\pi^{(i)}(\theta \mid \Delta X)}\{\theta\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot \theta_{MV}^{(i)} \tag{13}$$

4 结束语

针对带均匀抛撒子弹头的导弹, 本文研究的方法充分利用了子弹的均匀抛撒特性, 并借助自助统计方法求得子弹散布中心的自助分布,进而可以在试验次数极少的情况下较稳健地求得总体分布参数,为进一步进行命中精度评定奠定基础。该方法已被确定应用于试验命中精度评定。本文的方法如果与导弹定型试验之前的诸多验前信息综合运用, 可望取得更好的效果。

致谢: 本文的研究得到了张金槐教授的悉心指导!

参考文献:

[1] 陈希孺. 数理统计引论 [M], 科学出版社, 1999.

[2] 张金槐等. 远程火箭精度分析与评估 [M], 国防科技大学出版社, 1994.

[3] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法 [M], 第二版, 国防科技大学出版社, 1993.

[4] Efron B. Bootstrap Method: another look at Jackknife [J], Ann. Statist., 1979, 7: 1～26.

[5] 张金槐. 多种验前信息源情况下的融合验后分布 [J]. 飞行器测控技术, 1998, 9: 28～41.

[6] 夏胜平, 张金槐. 试验鉴定技术报告 [R], 国防科技大学自动控制系, 1999.