文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0115-02

强幂等元、强周期半群及 π 正则半群*

张新建, 唐善桂

(国防科技大学理学院, 湖南 长沙 410073)

(边防广州指挥学校)

摘 要: 由半群中幂等元的性质推断该半群的性质, 是半群代数理论中的一个基本问题。为此, 引入了强幂等元和强周期半群的概念, 通过对它们若干性质的讨论, 给出了正则半群的所有幂等元为强幂等元的充分必要条件, 建立了强周期半群与严格 π 正则半群的关系。

关键词: 强幂等元; 强周期半群; 严格 π 正则半群

中图分类号: O152.7 文献标识码: A

Strong Idempotents and Strong Periodic Semigroups and π Regular Semigroups

ZHANG Xin-jian

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

TANG Shan-gui

(Guang Zhou Frontier Guarding Command School)

Abstract: Strong idempotents and strong periodic semigroup are studied, and the relations between the strong period semigroup and strict π regular semigroup are also obtained.

Key words: strong Idempotent; Strong Period semigroup; Strict π Regular Semigroup

正则半群的研究始于 40 年代初, 50 多年来, 正则半群及其若干特殊情形(诸如纯整半群、逆半群等) 的研究已成为半群代数理论研究中的主流领域之一。一些著名的半群学家, 如 Pastign, Petrich, Yamada, Nambooripad 等都曾涉猎这一领域。近十多年来该领域的研究已取得了相当的进展。在半群代数理论中, 一个非常基本的问题是, 从半群的幂等元的性质可得到该半群的何种性质? 基于这种考虑, 本文中给出了一类特殊的幂等元——强幂等元, 它也是正则元, 并且还研究了由强幂等元组成的周期半群——(强周期半群) 与 π 正则半群、逆半群之间的关系。

1 强幂等元、强周期半群的定义、性质

定义 1 设 S 为半群, $f\in S$, 若 $\forall a\in S$, 有 $faf=f$, 则称 f 为半群 S 的强幂等元。

定义 2 设 S 为周期半群, 若 S 的所有幂等元皆为强幂等元, 则称 S 为强周期半群。

性质 1 半群 S 的强幂等元一定是幂等元。

证明 设 f 为 S 的强幂等元, 则有 $f=f^3$, 从而 $f^2=f^4$, 所以 $f=f(f^2)f=f^2$, 即 f 为 S 的幂等元。

性质 2 若 S 含有强幂等元 f, 则 $\forall a, b\in S$, afb、af、fa 均为强幂等元。

证明 $\forall c\in S$, 由 f 为强幂等元知,

$$(afb)c(afb) = a(fbcaf)b = afb.$$

故 afb 为强幂等元。而 $(fa)c(fa)=(facf)a=fa$, 所以 fa 为强幂等元。同样可证, af 为强幂等元。

性质 3 半群 S 的强幂等元的集合 E 是 S 的理想。

证明 设 $f\in E$, 则 $\forall a, b\in S$, 由性质 2 知, afb 为强幂等元, 从而 $SES\subseteq E$, 故 E 为 S 的理想。

定理 1 正则半群 S 的所有幂等元为强幂等元当且仅当 S 为矩形带。

* 收稿日期: 1999-08-25
作者简介: 张新建(1956-), 男, 副教授。

证明 若S的所有幂等元为强幂等元，由于S是正则的，故$\forall a,b\in S$，$\exists a'\in S$，使得$a=aa'a$，因而$aa'=aa'aa'=(aa')^2$，即aa'为幂等元；由假设，aa'为强幂等元。由性质2，$(aa')a$亦为强幂等元，又$a=aa'a$，故a是强幂等元。从而$\forall b\in S$，有$aba=a$，所以S为矩形带。

反之，若S为矩形带，显见S的任意元皆为正则的，且为强幂等元。

2 强周期半群与严格π正则半群及逆半群的关系

定理2 强周期半群S是严格π正则的。

证明 因S为周期半群，故S为π正则的。又S为强周期半群，由定理1的证明可知，正则元集$RegS$的每个元皆为强幂等元；又每一个强幂等元均为幂等元，因而是正则的。故$RegS$是S的所有强幂等元的集合。由性质3，$RegS$是S的理想。因$RegS$的所有元是幂等元，故它是完全正则半群(群的并)，从而S为严格π正则的。

定理3 设S为逆半群，I为S的强幂等元的集合，则$\forall a\in S$，映射

$$\varphi_a:\begin{array}{l} Iaa^{-1}\to a^{-1}Ia \\ e\to a^{-1}ea \end{array}$$ 是一个同构。

证明 显然，φ_a把每个$e\in Iaa^{-1}$映进$a^{-1}Ia$。

(1) φ_a是一一的。这是因为$\forall e、f\in Iaa^{-1}$，这里$e=eaa^{-1}=aa^{-1}e$，$f=faa^{-1}=aa^{-1}f$，由$e\varphi_a=f\varphi_a\Rightarrow a^{-1}ea=a^{-1}fa\Rightarrow a(a^{-1}ea)a^{-1}=a(a^{-1}fa)a^{-1}\Rightarrow(aa^{-1})e(aa^{-1})=(aa^{-1})f(aa^{-1})\Rightarrow e=f$，故$\varphi_a$是一一的。

(2) φ_a是满的。因若$e\in a^{-1}Ia$，则

$$e=(a^{-1}a)e(a^{-1}a)=a^{-1}(aea^{-1})a=(aea^{-1})\varphi_a$$

由于e为强幂等元，故由性质2知，aea^{-1}为强幂等元，即$aea^{-1}\in I$，所以$aea^{-1}=aea^{-1}aa^{-1}\in Iaa^{-1}$，即$\varphi_a$是满的。

(3) φ_a是同构。设$e、f\in Iaa^{-1}$，则

$$(e)\varphi_a(f)\varphi_a=(a^{-1}ea)(a^{-1}fa)=a^{-1}efa=(ef)\varphi_a$$

所以φ_a是一个同构。

定理4 设S是一个具有强幂等元的逆半群，且这些强幂等元是可交换的，令E为S的所有强幂等元的集合，T_E为E的$Munn$半群，则存在一个同态$\phi: S\to T_E$。

证明 由定理3.2知，$\varphi_a:\begin{array}{l} Eaa^{-1}\to a^{-1}Ea \\ e\to a^{-1}ea \end{array}$ 是一个同构，且$\varphi_a^{-1}=\varphi_{a^{-1}}$，故$\varphi_a\in T_E$。

令$\phi:\begin{array}{l} S\to T_E \\ a\to\varphi_a \end{array}$下证$\phi$为S到$T_E$的同态。

若$a,b\in S$，则$\varphi_a\varphi_b\in T_E$，$\varphi_a\varphi_b$映$E_i$到$E_j$，此处

$$i=(a^{-1}abb^{-1})\varphi_a^{-1}=a(a^{-1}abb^{-1})a^{-1}=abb^{-1}a^{-1}=(ab)(ab)^{-1},$$

$$j=(a^{-1}abb^{-1})\varphi_b=b^{-1}(a^{-1}abb^{-1})b=b^{-1}a^{-1}ab=(ab)^{-1}(ab)$$

$\forall e\in E_i$，$(e)\varphi_a\varphi_b=(a^{-1}ea)\varphi_b=b^{-1}(a^{-1}ea)b=(ab)^{-1}e(ab)=(e)\varphi_{ab}$故$\varphi_a\varphi_b=\varphi_{ab}$. 从而$\phi$为同态。

参考文献:

[1] 唐善桂．张新建．跨世纪的湖南科技[M]，湖南科技出版社，1996.10.

[2] 唐善桂．江兆林．几类特殊正则半群的性质[J]，模糊系统与数学，1997.12.

[3] 唐善桂．广义带的广义簇[J]，曲阜师范大学学报，1994.

[4] J.M.Howie, An introduction to semigroups theory. 1976.

[5] Munn, W.D., Uniform semigroups and bisimple inverse semigroups, Quart. J. Math. Qxford Soc., 17(1966), 151–157.