

文章序号: 1001-2486 (2000) 03-0044-06

带转动自由度的轴对称四边形单元*

任钧国

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

熊龙飞

(指挥技术学院, 北京 101416)

摘要: 在节点增加角旋转自由度的基础上构造任意四边形轴对称单元协调的位移模式, 为了提高精度, 消除几何敏感性和适应不可压缩材料, 在协调的基础上又引入三个非协调的内部位移函数和泡状函数作为附加位移场。数值计算表明由此构造的新单元的性能更好。

关键词: 旋转自由度; 轴对称; 四边形单元

中图分类号: O34 文献标识码: A

A Quadrilateral Axisymmetric Element with Rotating Degree of freedom

REN Jun-guo

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

XIONG Long-fei

(Institute of Command Technology, Beijing 101416, China)

Abstract: A quadrilateral axisymmetric element with rotating degree of freedom at the vertex nodes is derived. For improving the precision of the element, decreasing the sensitivity of element geometry and applying it to nearly incompressible materials, three non-conforming displacement functions and a "bubble" function are selected as the internal freedom of the element. The results of the numerical examples show that the performance of the new element is fine.

Key words: rotating degree of freedom; axisymmetry; quadrilateral element

提高各类问题四边形单元的精度, 一直是国内外学者重视的一个问题。由于四边形单元对网格的形状敏感性很大, 材料接近于不可压缩时又出现闭锁现象, 国内外学者提出了许多解决办法。最早是采用降阶积分, 或者采用弯曲和剪切不同积分格式, 这些办法经验性很大。接着采用了不协调内部自由度方法, Wilson^[1]首先, 引入不协调函数 $(1-\xi^2)$ 、 $(1-\eta^2)$, 但通不过分片试验, 于是又提出了一些弱分片试验办法^[2], 使得构造了许多性能优越的单元。另外有的学者针对分片试验, 提出一些条件, 例如拟协调方法^[3]、广义协调方法^[4], 文献 [5] 进行了一个简要的综述。Allman^[6]等人引入角转动自由度方法是一种卓有成效的方法, 使得单元的精度有所提高。许多学者应用各种方法研究了轴对称四边形单元, 如 Bachrach^[7]和 Sze^[8]等。

1 协调位移场和附加位移场

Allman^[6]提出的协调的平面问题三角形单元位移场为

$$u = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3 + \frac{1}{2} L_{12} \cos \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) L_1 L_2 + \frac{1}{2} L_{23} \cos \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) L_2 L_3 + \frac{1}{2} L_{31} \cos \gamma_{31} (\omega_1 - \omega_3) L_3 L_2 \quad (1a)$$

* 收稿日期: 1999-07-01

作者简介: 任钧国 (1946), 男, 教授。

$$v = v_1 L_1 + v_2 L_2 + v_3 L_3 + \frac{1}{2} L_{12} \sin \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) L_1 L_2 + \frac{1}{2} L_{23} \sin \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) L_2 L_3 + \frac{1}{2} L_{31} \sin \gamma_{31} (\omega_1 - \omega_3) L_3 L_2 \quad (1b)$$

其中, L_1, L_2, L_3 为三角形的面积坐标, l_{ij} 和 $(\cos \gamma_{ij}, \sin \gamma_{ij})$ 为边 ij 的长度和外法线方向余弦, 各顶点有三个自由度 (u_i, w_i, ω_i) 。此位移场在常应变单元的基础上, 引入由各边的顶点角转动自由度 $(\omega_j - \omega_i)$ 引起的附加位移场, 此位移场在边界上产生法向位移, 不产生切向位移。在其余各边上的位移为零, 而此法向位移仅与 ω_j, ω_i 有关, 因此保证了单元之间协调。很容易将此方法推广到四边形单元。

图 1 所示轴对称四边形单元其在顶点 i 包含有两个线位移 u_i, w_i 和一个转动自由度 ω_i 。于是每节点自由度为

$$\delta_i = [u_i \ w_i \ \omega_i]^T \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

单元节点自由度为

$$\delta = [\delta_1^T \ \delta_2^T \ \delta_3^T \ \delta_4^T]^T \quad (3)$$

单元的位移由节点线位移自由度和角转动自由度插值的二部分位移之和组成, 即

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^\theta \quad (4)$$

其中 \mathbf{u}^0 是由单元的自然坐标表示的双线性函数, 表示为

$$\mathbf{u}^0 = \begin{Bmatrix} u^0 \\ w^0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

而 \mathbf{u} 则是由单元角节点转动自由度 $\omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 确定的位移, 类似于 Allman 三角形单元, 在 ij 边上, 与两角节点转动自由度 $\omega_j - \omega_i$ 有关, 插值函数要求在其余各边为零, 在 ij 边上仅与 ξ 或 η 相关, 八节点等参单元边的中节点的位移函数, 可以满足要求, 于是 \mathbf{u}^θ 可表示为

$$\mathbf{u}^\theta = \begin{Bmatrix} u^\theta \\ w^\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 l_{ij} \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ij} \\ \sin \gamma_{ij} \end{bmatrix} N_{i+4}(\omega_j - \omega_i) \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} j &= i + 1 \quad (i = 1, 2, 3) & j &= 1 \quad (i = 4) \quad (\text{下同}) \\ N_5 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta) & N_7 &= (1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_6 &= (1 - \eta^2)(1 + \xi) & N_8 &= (1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned}$$

l_{ij} 和 $(\cos \gamma_{ij}, \sin \gamma_{ij})$ 为 ij 边长度和外法线方向余弦, 由式(4)、(5)和(6)表示的位移场为协调位移场。

为了提高单元精度, 引入用单元内部自由度表示的附加位移场 $\{u_\lambda, w_\lambda\}^T$, 其位移场为 (ξ, η) 的三次多项式, 为了保证单元通过分片试验, 采用了柱坐标下的广义协调条件^[10], 即

$$\int_{\Gamma_j} \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ w_\lambda \end{Bmatrix} r ds = 0 \quad (7)$$

满足上述条件的三个函数为

$$\begin{cases} F_1 = \xi^2 + \eta^2 - \frac{4}{3} \\ F_2 = \xi(5\xi^2 + 3\eta^2 - 6) \\ F_3 = \eta(3\xi^2 + 5\eta^2 - 6) \end{cases} \quad (8)$$

若还选择一个泡状内部自由度函数

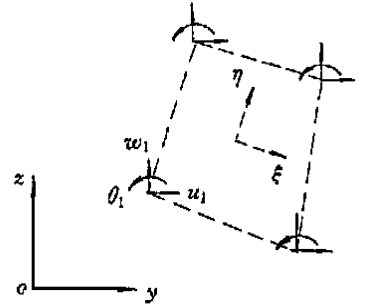


图 1 带动自由度的四边形单元

Fig 1 Quadrilateral element with rotating degree of freedom

$$F_4 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (9)$$

那么, 附加位移为

$$\begin{Bmatrix} u_\lambda \\ w_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & F_3 & 0 & F_4 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & F_2 & 0 & F_3 & 0 & F_4 \end{bmatrix} \lambda = N_\lambda \lambda \quad (10)$$

其中

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_8]^T$$

将两位移场合并, 就得到轴对称单元的位移场:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & l_{ij} \cos \gamma_{ij} N_{i+4} \\ 0 & N_i & l_{ij} \sin \gamma_{ij} N_{i+4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \omega_j - \omega_i \end{Bmatrix} + N_\lambda \lambda \\ &= \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \omega_j - \omega_i \end{Bmatrix} + N_\lambda \lambda = N A \delta^e + N_\lambda \lambda \end{aligned} \quad (11)$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \mathbf{I} & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \mathbf{I} & \\ & 1 & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

这里 \mathbf{I} 为 2×2 的单位矩阵。

2 单元刚体矩阵和载荷向量

有了轴对称单元的位移模式, 就可利用轴对称问题的几何方程求得应变分量

$$\varepsilon = \mathbf{B} A \delta^e + \mathbf{B}_\lambda \lambda = \mathbf{B} \delta^e + \mathbf{B}_\lambda \lambda \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\varepsilon \quad \theta \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z]^T \\ \mathbf{B} &= [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \\ \mathbf{B}_\lambda &= [B_{\lambda 1} \quad B_{\lambda 2} \quad B_{\lambda 3} \quad B_{\lambda 4}] \end{aligned}$$

这里

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 & l_{ij} \cos \gamma_{ij} N_{i+4,r} \\ N_i/r & 0 & l_{ij} \cos \gamma_{ij} N_{i+4}/r \\ 0 & N_{i,z} & l_{ij} \sin \gamma_{ij} N_{i+4,z} \\ N_{i,z} & N_{i,r} & l_{ij} \cos \gamma_{ij} N_{i+4,z} + l_{ij} \sin \gamma_{ij} N_{i+4,r} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_{Ni} = \begin{bmatrix} F_{i,r} & 0 \\ F_i/r & 0 \\ 0 & F_{i,z} \\ F_{i,z} & F_{i,r} \end{bmatrix} \quad (14)$$

利用本构方程便可得出以节点位移表示应力的关系式

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B} \delta^e \quad (15)$$

其中

$$\sigma = \{\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}\}^T$$

D 是轴对称问题的弹性矩阵。按通常的有限元方法, 得到单元刚度矩阵 K 和单元载荷列阵 F^e , 在单元层次上, 平衡方程为

$$\begin{bmatrix} K_{\delta\delta} & K_{\delta\lambda} \\ K_{\lambda\delta} & K_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

其中

$$K_{\delta\delta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| r d\xi d\eta$$

$$K_{\delta\lambda} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B_\lambda |J| r d\xi d\eta = K_{\lambda\delta}^T$$

$$K_{\lambda\lambda} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_\lambda^T D B_\lambda |J| r d\xi d\eta$$

采用静凝聚法, 得到

$$(K_{\delta\delta} - K_{\delta\lambda} K_{\lambda\lambda}^{-1} K_{\lambda\delta}) \delta^e = F^e \quad (17)$$

于是单元刚度矩阵为

$$K^e = K_{\delta\delta} - K_{\delta\lambda} K_{\lambda\lambda}^{-1} K_{\lambda\delta} \quad (18)$$

将单元刚度矩阵 K^e 与单元载荷列阵 F^e 分别组装成整体刚度矩阵 K 和整体载荷列阵 F , 得关于节点自由度的方程

$$K \delta = F \quad (19)$$

处理边界条件后可求得 δ , 由已求出得单元节点量 δ^e 求出单元附加的节点量 λ^e , 进而可由式 (12) 和式 (15) 求出单元的应变与应力。

3 算例

由上述方法得到的单元记为 Axi4, 为考察此单元的性能, 应用 Axi4 单元计算几个实例, 这些实例大多为文献中广泛采用的算例。

3.1 分片试验

对于一内外加压或上下表面有均布压力的厚壁圆筒, 计算结果表明, 单元 Axi4 能重现所有的节点和单元的常应力状态的位移和应力, 即能通过分片试验。

3.2 规则网格的厚壁圆筒

如图 2 所示的厚壁圆筒受到均布的内压作用, 将其划分成 5 个边长为 a 的正方形单元, 分析各单元的中心点应力和位移, 其结果与精确解进行比较, 各种单元产生的百分误差列在表 1 中, 当材料接近于不可压缩材料时的结果, 由此可见本文构造的单元 Axi4 有良好的性能。

表 1

Tab. 1

泊松比 μ		$u (r=5a)$	σ_{rd}	$\sigma_{\theta d}$	σ_{zd}
0.49	Q4	28.79	-2.00	4.40	1.17
	SQ4	31.53	-2.44	4.62	1.07
	HA1	31.53	-2.44	4.62	1.07
	Axi4	31.71	-2.43	4.56	1.05
	精确解	31.78	-2.45	4.57	1.04
0.499	Q4	15.53	0.07	3.56	1.18
	SQ4	31.57	-2.44	4.62	1.09
	HA1	31.57	-2.44	4.62	1.09
	Axi4	31.76	-2.43	4.55	1.06
	精确解	31.83	-2.45	4.57	1.06
0.4999	Q4	2.84	2.10	2.73	2.41
	SQ4	31.57	-2.44	4.62	1.09
	HAL	31.57	-2.44	4.62	1.09
	Axi4	31.76	-2.48	4.50	1.01
	精确解	31.83	-2.45	4.57	1.06

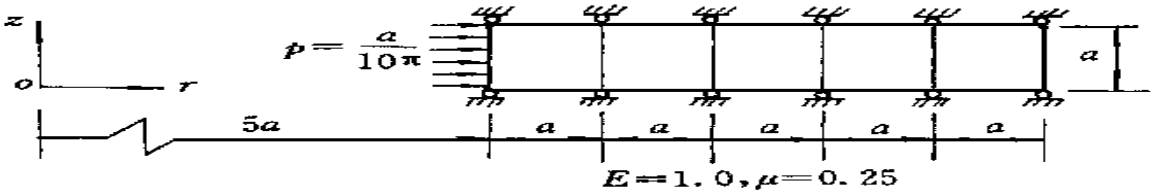


图2 受内压作用的厚壁圆筒

Fig. 2 Thick ring under internal pressure

在以下各图表中，各有限单元格的表示采用了简单记法，其意义和记法如下： Q_4 为普通的四边形单元； SQ_4 为 Chen 和 Cheung 提出的杂交元^[9]；HA1 为 Sze 和 Chow 提出的杂交元^[8]。

3.3 几何敏感性分析

与上一问题相同，仍用厚壁圆筒，但外径较小，如图3所示，用一参数 e 描述单元的畸变， e 的变化范围为 $0 \sim 0.75$ 。A 点的位移和应力与精确解比较的百分误差曲线绘在图4和图5中。从图中位移分量误差与畸变程度关系曲线在低水平上的平缓之势可见 $Axi4$ 极大程度地消除了几何敏感性，应力分量的误差较之位移分量误差大。

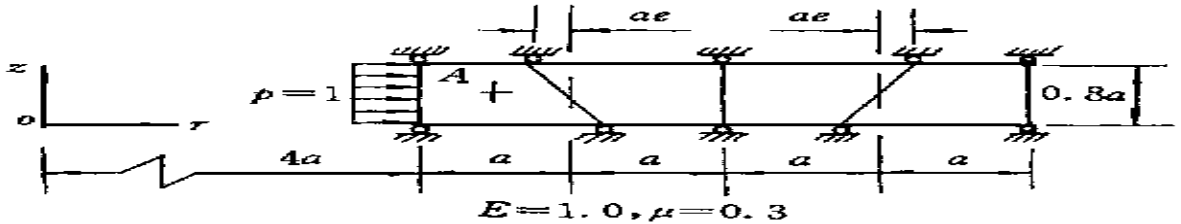


图3 畸变的网格

Fig. 3 Distorted mesh

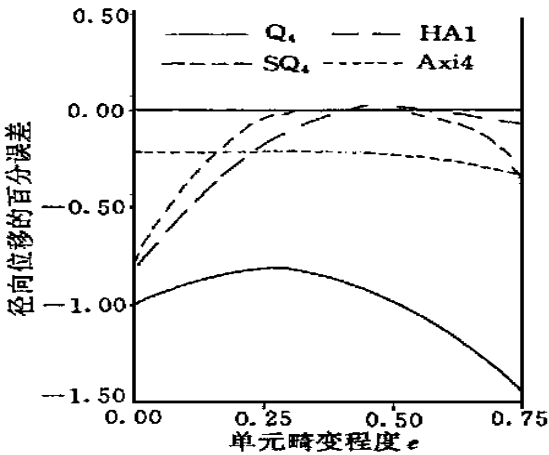


图4 径向位移误差与单元畸变的关系

Fig. 4 Relationships between r-displacement and element distortion

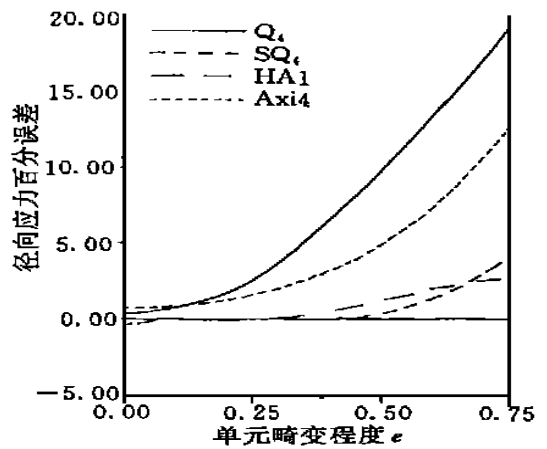


图5 径向应力误差与单元畸变的关系

Fig. 5 Relationships between r-stress error and element distortion

3.4 薄板分析

此例的目的是检验所提出的单元对薄板问题是否发生闭锁，仍以图6(a)中所示圆板为例，只是将泊松比固定为 $\mu = 0.25$ ，而板的厚度从1变化到0.005。表2列出了畸变 $e = 0$ 和 $e = 0.025$ 时的节点A的位移 w_A 与板厚 t 的三次方的乘积 $w_A t^3$ 的计算结果。结果表明 $Axi4$ 单元显著地改善了普通四边形元对于大长宽比精度差的不足之处。

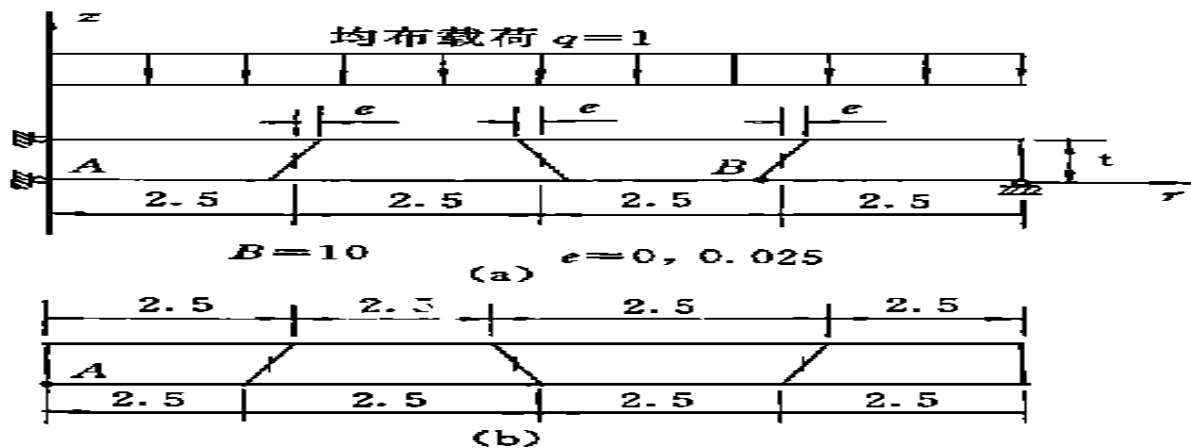


图6 均布载荷简支圆板

Fig. 6 Simply-supported circular plate under uniformly distributed load

表2

Tab. 2

单元纵横比	2.5	2.5	100	250	500	
规则 网格	Q ₄	-513.52	-25.21	-1.64	-0.26	-0.07
	HA1	-763.37	-758.79	-758.73	-758.73	-758.73
	FA1	-763.37	-758.79	-758.73	-758.73	-758.73
	Axi4	-737.84	-732.45	-732.41	-732.45	-736.71
	精确解			-738.28		
不规则 网格 (e=0.025)	Q ₄	-512.10	-17.02	-0.66	-0.106	-0.03
	HA1	-760.28	-478.25	-412.81	-410.83	-410.56
	HA1	-760.24	-478.16	-412.81	-410.84	-410.55
	Axi4	-737.84	-730.42	-732.17	-730.42	-710.65
	精确解			-738.28		

4 结论

本文构造的单元能够通过分片试验, 保证单元的收敛性。数值计算表明单元 Axi4 性能优异, 对网格畸变敏感度很低, 对不可压缩材料无闭锁现象, 对细长单元与粗网格精度很高。单元对应力的分析也有改善, 可望作深入研究, 如果对超收敛应力点进行插值, 单元的应力可大大改进。

参考文献:

- [1] Wilson E L, Taler R L, Doherty W P. Incompatible displacement models, Numerical and Computer Methods in structural mechanics [M]. Academic Press, New York, 1973: 43-57.
- [2] Taler R L, Beresford P J, Wilson E L. A Non-conforming element for stress analysis [J]. Int. J. Numer. Methods Engng, 1976, 10: 1211-1219.
- [3] 唐立民, 陈万吉, 刘迎西. 有限元分析中的拟协调元法 [J]. 大连工学院学报, 1980, 19: 19-35.
- [4] 龙驭球, 辛克贵. 广义协调元 [J]. 土木工程学报, 1987, 20: 1-14.
- [5] 任钧国, 熊龙飞. 低阶高精度单元的发展 [J]. 国防科技大学学报, 1998, 20 (4).
- [6] Allman D J. A compatible triangular element inducing vertex rotations for plane elasticity analysis. Computers and Structures [J]. 1984, 19: 1.
- [7] Bachrach W E, Belytschko T. Axisymmetric elements with high coarse-mesh accuracy [J]. Computers and Structures, 1986, 23: 323-331.
- [8] Sze K Y, Chow C L. An incompatible element for axisymmetric structure and its modification by hybrid method [J]. Int. J. Numer. Methods Engng., 1991, 31: 385-405.
- [9] Chen W J, Cheung Y K. Axisymmetric solids elements by the generalized hybrid method [J]. Comp. Struct., 1987, 27: 745-752.
- [10] 吴长春. 非协调数值分析与杂交元的方法 [M]. 科学出版社, 1997.