

文章编号: 1001-2486 (2000) 03- 0096-004

双级闪耀光栅位移精密测量的傅里叶分析*

吕海宝, 徐涛, 杨华勇, 曹聚亮, 苏绍景, 王刚

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 采用傅里叶光学的理论对双级闪耀光栅位移测量原理进行了分析, 导出了经光栅衍射后光波的振幅和强度表达式, 得出了位移测量公式, 并指出形成的莫尔条纹为近乎理想的对比度极强的双光束干涉条纹, 该结论与 Post D 的有关理论和实验结果完全一致。

关键词: 傅里叶分析; 闪耀光栅; 位移测量; 莫尔条纹

中图分类号: O438.2 **文献标识码:** A

Fourier Analysis for Precision Displacement Measurement with a Doubly Blazed Reference Grating

LU Hai-bao, XU Tao, YANG Hua-yong, CAO Ju-liang, SU Shao-jing, WANG Gang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, the fundamental principle of precision displacement measurement with a doubly blazed grating is analyzed in detail by means of Fourier Optics. The mathematical expressions about the amplitude and the intensity of diffracted light are derived, and the measurement formula is presented. At the same time it is indicated that moire fringes are nearly perfect two-beam interference fringes with superb contrast. These conclusions are consistent with the theoretical and experimental results given by Post D, and helpful to further development of the measurement principle.

Key words: Fourier analysis; blazed grating; displacement measurement; moire fringes

Post 于 20 世纪 60 年代利用非对称双级闪耀参考光栅构建位移测量系统, 最早实现了莫尔条纹的倍增, 并指出经光栅系统衍射后产生的莫尔条纹是近乎理想的对比度极强的双光束干涉条纹, 莫尔条纹的灵敏度反比于细光栅的光栅常数, 而与粗光栅的光栅常数无关, 莫尔图样只敏感于平面位移, 对光栅空隙的厚度和锥度不敏感^[1, 2]。国内, 80 年代有人做过闪耀光栅的实验研究^[3]。双级闪耀光栅测量方法很好地解决了高线数光栅不能做得太长所带来的问题, 在不降低灵敏度的条件下同时提高了量程, 从而使测量兼有量程大、分辨率高的突出优点, 这在精密及超精密测量中有着重要的应用价值。

1 双级闪耀光栅位移测量原理简介

双级闪耀光栅位移测量光路如图 1 所示。图中 G_1 为位相型细光栅, 也称参考光栅, 一般用闪耀光栅, 光栅常数为 d_r , G_2 为振幅型粗光栅, 也称标尺光栅, 光栅常数为 d_s 。两光栅相距很近, 表面及栅线相互平行, 且标尺光栅的光栅常数为参考光栅光栅常数的整数倍, 即 $d_s = \beta d_r$, 其中 β 为正整数。光屏 S 放在透镜 L 的焦平面上, 经 G_1 、 G_2 光栅衍射方向相同的光束由透镜会聚在光屏上形成莫尔干涉条纹, 并由光电探测器 D 接收。

入射面垂直于栅线的单色平行光束入射光栅 G_1 后被衍射成 m 级光束, 以 P 表示其衍射级序, 每一级衍射光束又被光栅 G_2 衍射成 n 级光束, 以 q 表示其衍射级序。这样经 G_1 、 G_2 光栅衍射后共形成 m

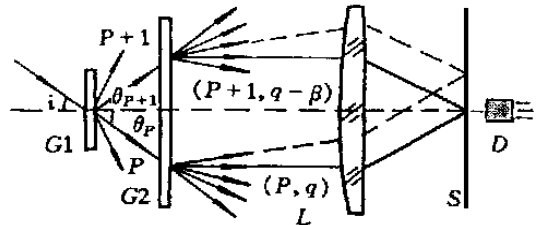


图 1 双级闪耀光栅位移测量光路图

Fig. 1 Optical principle figure of displacement measurement with a doubly blazed grating

* 收稿日期: 1999-12-28

基金项目: 国防重点实验室基金资助项目(99JS53.8.1.KG0117)

作者简介: 吕海宝(1941), 男, 教授, 博士生导师。

$\times n$ 个可能的衍射序列, 以 (P, q) 表示其衍射序列。通过对入射角 i 的调整, 可使经 $G1$ 后两相邻的衍射级次 P 和 $P+1$ 级对称分布于光栅法线的两侧, 即有 $\theta_{P+1} = -\theta_P$ 。

对图 1 所示光路, 可以证明^[4]: 衍射序列 (P, q) 和 $(P+1, q-\beta)$ 具有相同的出射方向, 即二者出射光束相互平行; 并且当标尺光栅 $G2$ 相对参考光栅 $G1$ 沿垂直于栅线方向水平移动 d_s 距离时, 莫尔条纹明暗变化一次, 移动距离为 d_s 时, 莫尔条纹明暗变化 β 次, 相对标尺光栅的光栅常数 d_s 而言则实现了 β 倍的条纹倍增。这样, 莫尔条纹的灵敏度即为参考光栅的灵敏度, 与标尺光栅无关, 位移测量的量程约等于标尺光栅的长度, 与参考光栅无关, 且可以做得很长。而且莫尔条纹唯一描述了光栅平面内的位移, 对两光栅之间间隙的大小和锥度不敏感, 从而使位移测量兼有大量程和高分辨率的特点。

为了提高莫尔条纹的对比度和信噪比, 保证上述测量系统的性能, 关键是要获得等强度的双级主衍射 (P 和 $P+1$ 级, 通常为 0 级和 1 级), 并减少其他衍射级次的强度, 这是通过双级闪耀光栅来实现的。闪耀光栅截面如图 2 所示, 其刻槽呈锯齿型, 锯齿的长边相当于透光的“衍射缝”, 短边为不透光的“缝间隔”, 透射斜面与光栅平面的夹角 Φ 称为闪耀角。理论分析表明, 单色光入射闪耀光栅时, 衍射的主极大出现在光栅的自然折射方向上, 该方向与光栅的闪耀角有关。通过选取适当的闪耀角, 可使光栅的自然折射方向落在 0 级和 1 级衍射光束之间, 从而使 0 级和 1 级光强大致相等, 得到等强度的双级主衍射, 保证了上述测量系统的实现。

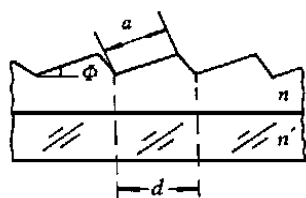


图 2 闪耀光栅截面轮廓图
Fig. 2 Section contour of blazed grating

2 测量原理的傅里叶分析

由衍射现象的傅里叶分析可知, 夫琅和费衍射系统中透镜后焦面 ($x'y'$ 面) 上的复振幅分布就是衍射屏 (xy 面) 上复振幅分布的傅里叶变换, 后焦面就是衍射屏上复振幅分布的傅里叶谱面, 即有

$$E(P) = E(u, v) = F\{E(x, y)\} \quad (1)$$

式中 P 为透镜后焦面上的任一点, 空间频率与后焦面坐标之间的关系为

$$\begin{aligned} u &= \cos\alpha / \lambda = x' / f \\ v &= \cos\beta / \lambda = y' / f \end{aligned} \quad (2)$$

这里 α, β 为衍射光线与 x, y 轴的夹角, λ 为单色光波长, f 为透镜的焦距。

振幅型透射光栅是在一块透明的基板上刻上等间距的一系列刻痕而形成的。可将此光栅视为一复杂衍射屏, 它能对入射光的幅度产生周期性的空间调制。取理想情况, 假定在刻痕处透射率为 0, 无刻痕处透射率为 1。设光栅总缝数 N 为奇数, 在光栅面上取坐标如图 3 所示, 其中 y 轴平行于光栅栅线方向, 则光栅的透射函数可写成

$$t(x) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \text{rect}[(x - nd) / a] \quad (3)$$

其中,

$$\text{rect}(x/a) = \begin{cases} 1 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

d 为光栅常数, a 为透光宽度。

考虑以 θ_1 角入射到光栅面的单色平面波 (入射面垂直于光栅栅线方向), 其复振幅为

$$E_1(x) = a_1 \exp(ikx \sin\theta_1) \quad (4)$$

其中 $k = 2\pi / \lambda$ 为波数。 $E_1(x)$ 经光栅透射后变为

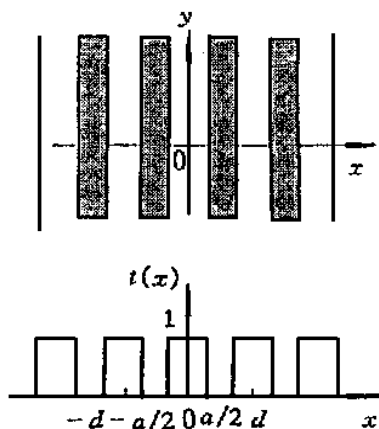


图 3 振幅型透射光栅及其透射函数
Fig. 3 Amplitude transmission grating and its transmission function

$$\mathcal{E}(x) = a_1 \exp(ikx \sin \theta_1) \cdot \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \text{rect}[(x - nd)/a] \quad (5)$$

因此,其傅里叶变换为

$$\mathbf{E}(u) = a_1 a \sin c[a(u - \sin \theta_1/\lambda)] \cdot \frac{\sin[N\mathcal{U}(u - \sin \theta_1/\lambda)]}{\sin[\mathcal{U}(u - \sin \theta_1/\lambda)]} \quad (6)$$

其中函数 $\sin c(u) = \sin(\mathcal{U})/\mathcal{U}$ 。故经光栅后的夫琅和费衍射复振幅分布为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta) |_{E(u) = \sin \theta/\lambda} \\ = a_1 a \sin c\left[\frac{a(\sin \theta - \sin \theta_1)}{\lambda}\right] \frac{\sin[N\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_1)/\lambda]}{\sin[\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_1)/\lambda]} \end{aligned} \quad (7)$$

当光栅沿着垂直于光栅表面法线方向平移距离 l 时,光栅的透射函数也发生平移,此时入射角为 θ_p 的平面波入射到光栅上,经光栅透射后的光波为

$$\mathcal{E}_p(x) = a_p \exp(ikx \sin \theta_p) \cdot \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \text{rect}[(x - nd - l)/a] \quad (8)$$

取其傅里叶变换,可得夫琅和费衍射的复振幅为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p(\theta) = a_p a \sin c\left[\frac{a(\sin \theta - \sin \theta_p)}{\lambda}\right] \cdot \frac{\sin[N\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)/\lambda]}{\sin[\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)/\lambda]} \cdot \exp\left[-\frac{i2\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)}{\lambda}\right] \\ = A_p \exp[-i2\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)/\lambda] \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $A_p = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, 其中 $A_1 = a_p a$ 为幅度因子; $A_2 = \sin c\left[\frac{a(\sin \theta - \sin \theta_p)}{\lambda}\right]$ 仅与光栅的透光宽度 a 有关,称为单缝衍射因子; $A_3 = \frac{\sin[N\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)/\lambda]}{\sin[\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_p)/\lambda]}$ 仅与光栅的光栅常数 d 有关,称为多缝衍射因子。由 A_3 表达式易见,当满足

$$d(\sin \theta - \sin \theta_p) = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

时,因子 A_3 取得极大值,式(10)就是斜入射时透射光栅的光栅方程表达式。它表明,单色入射光经光栅衍射后能量重新分配,分成许多离散的衍射级次,与各级次对应的衍射角由式(10)决定。

同理,对于入射角为 θ_{p+1} 的入射光,经光栅后的夫琅和费衍射场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p+1}(\theta) = a_{p+1} a \sin c \\ \left[\frac{a(\sin \theta - \sin \theta_{p+1})}{\lambda}\right] \cdot \frac{\sin[N\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_{p+1})/\lambda]}{\sin[\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_{p+1})/\lambda]} \cdot \exp\left[-\frac{i2\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_{p+1})}{\lambda}\right] \\ = A_{p+1} \exp[-i2\mathcal{U}(\sin \theta - \sin \theta_{p+1})/\lambda] \end{aligned} \quad (11)$$

式中的振幅 A_{p+1} 同样也为单缝衍射因子和多缝衍射因子的乘积。

由图1可知,当单色平面波以 i 角入射到 G_1 上,由于发生双级主衍射而产生两个主衍射级次(P 和 $P+1$ 级),此两级光又作为入射光入射到 G_2 上,经光栅后的夫琅和费衍射场分别由式(9)和式(11)给出。这样,经光栅衍射后沿同一方向出射的光的复振幅为二者的叠加,即有

$$\mathbf{E}(\theta) = \mathbf{E}_p(\theta) + \mathbf{E}_{p+1}(\theta) = |\mathbf{E}(\theta)| \exp[i \cdot \arg \mathbf{E}(\theta)] \quad (12)$$

因一般有两束入射光对称分布于光栅法线的两侧,即 $\theta_p = -\theta_{p+1}$, 于是

$$|\mathbf{E}(\theta)| = [A_p^2 + A_{p+1}^2 + 2A_p A_{p+1} \cos(2kl \sin \theta_p)]^{1/2} \quad (13)$$

$$\arg[\mathbf{E}(\theta)] = \text{tg}^{-1} \frac{(A_p - A_{p+1}) \sin(kl \sin \theta_p)}{(A_p + A_{p+1}) \cos(kl \sin \theta_p)} - kl \sin \theta \quad (14)$$

我们关心的是 θ 角方向的出射强度随位移 l 的变化情况,在 $\theta_p = -\theta_{p+1}$ 时,强度分布为

$$I = |\mathbf{E}(\theta)|^2 = A_p^2 + A_{p+1}^2 + 2A_p A_{p+1} \cos(2kl \sin \theta_{p+1}) \quad (15)$$

对双级闪耀光栅位移测量光路来讲,两级次对称分布,且有

$$\sin \theta_p = \lambda/2d_r \quad (16)$$

式中 d_r 为闪耀光栅的光栅常数,代入式(15)有

$$I = A_P^2 + A_{P+1}^2 + 2A_P A_{P+1} \cos(2\pi \cdot \frac{l}{dr}) \quad (17)$$

根据式(17)作出光强变化曲线如图4所示。显然, 光强随位移的变化呈余弦函数关系。当幅度满足 $A_P = A_{P+1}$ 时, 出射光强为 $I = 2A_P^2 [1 + \cos(2\pi/d_r)]$, 此时产生的条纹有最大的对比度。由此可见, 该系统的莫尔条纹是近乎理想的对比度极强的双光束干涉条纹, 这与最初 Post D 指出的结论和实验结果吻合得相当好。

一般情况下, 自光栅付出射的方向相同的衍射序列, 除了序列级次为 (P, q) 和 $(P+1, q-\beta)$ 的衍射光外, 还存在 $(P+n, q-n\beta)$ 的衍射光。这样, 每当标尺光栅移动一个 d_r 距离时, 除了基波信号外, 还存在着其它 n 阶的高级谐波信号, 于是光电元件接收到的信号不是纯净的基波信号, 这是不希望有的。但当采用双级闪耀光栅时, 光能量集中在 P 和 $P+1$ 级上, 而其它各级衍射光的能量非常小, 谐波的影响被大大削弱, 故获得的基本上是等光强双光束干涉的基波信号。

此外, 由式(16)还可知, 当粗光栅沿着垂直于光栅法线方向每移动 dr 时, 屏上任一点的条纹亮暗变化一次。莫尔条纹亮暗变化数 N 与粗光栅位移量 l 的对应关系为

$$N = \frac{l}{d_r} = \frac{l}{d_s/\beta} \quad (18)$$

式(18)也表明, 粗细光栅之间发生位移时, 系统的位移灵敏度仅反比于细光栅的光栅常数 dr , 与粗光栅的光栅常数并无直接关系。由于粗光栅可以做得较长, 而细光栅的光栅常数可以做得很小(几百乃至上千线每毫米), 从理论上讲系统位移测量的分辨率仅受 $\lambda/2$ 的限制(这一点也可由式(16)得出), 一般为零点几个微米, 若再加上后续电路的细分, 分辨率可达纳米级或更小量级, 从而可以实现大量程的纳米级位移测量。

3 结束语

本文在傅里叶光学理论的基础上, 对双级闪耀光栅位移测量光路进行了详尽的分析, 推导了经光栅衍射后光波场的振幅和强度表达式, 并给出了简洁的测量公式。分析指出, 该系统的莫尔条纹是近乎理想的对比度极强的双光束干涉条纹, 结论和有关理论和实验结果完全一致。

双级闪耀光栅位移测量技术因其测量量程大、分辨率高, 无论是在超精密测量还是在超精密加工领域都具有独特的优势和较高的应用价值。然而闪耀光栅需要精确控制闪耀角, 才能实现等强度的双级主衍射, 减少其他谐波级次的能量。因此, 高线数的闪耀光栅制作困难, 价格昂贵, 目前尚无系列化的产品, 这也是双级闪耀光栅测量系统的不足之处。

参考文献:

- [1] Post D. Moire Fringe Multiplication with a Nonsymmetrical Doubly Blazed Reference Grating [J]. Applied optics, 1971, 10(4): 901~ 907.
- [2] Post D. Analysis of Moire Fringe Multiplication Phenomena [J]. Applied optics, 1967, 6(11): 1938~ 1942.
- [3] 张绍宗. 光栅在超精密加工中的应用兼论光栅技术的发展趋势 [C]. 全国超精加工学术会议论文集, 1997, 86~ 89.
- [4] 张善钟等. 计量光栅技术 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1985.

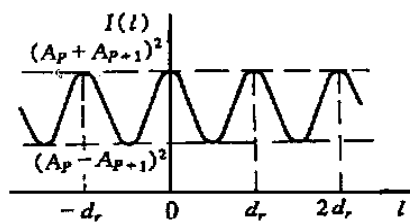


图4 观察点处光强随位移的变化曲线

Fig. 4 Relationship curve of Light intensity and displacement at any observe point