国防科技大学学报
第 22 卷 第 4 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 22 No. 4 2000

文章编号: 1001-2486 (2000) 04-0015-04

多体系统 Lagrange 方程的算法研究*

黄新生, 黄圳圭, 黄柯棣

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 分析了欧拉角描述多体系统球铰的有关数值病态问题, 提出在一定条件下, 引入相应约束的解决思路以及混合伪坐标拉格朗日方法。

关键词: 多体系统; 计算方法; 仿真

中图分类号: O313.3 文献标识码: A

Analysis of Lagrange Equation Computational Method of Multibody System

HUANG Xin-sheng, HUANG Zhen-gui, HUANG Ke-di

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper analyzes ill-conditioned Lagrange Equation of multibody system with three degree-of-freedom rotational joint and presents a mixed pseudo coordinate lagrange's method based on constraint replacement.

Key words: multibody system; computational method; simulation

多体系统连接体间的旋转自由度通过将欧拉角作为广义坐标来描述具有以下优点: 当欧拉角在一定的范围内变化 ($0 < \theta_{js} < \pi$) 时, 不附加任何约束方程; 广义坐标与系统的实际结构相对应, 实际应用起来直观方便; 所建立的动力学方程具有单向迭代的形式, 便于计算机符号推演[3]。但是在某种特殊的情况下, 欧拉角作为广义坐标变量会带来问题。如球铰的旋转自由度 $N_{RT} = 3$, 当旋转轴 $\boldsymbol{P}_{j1}$ 与 $\boldsymbol{P}_{j2}$ 的夹角 $\theta_{j3} = 0$ 时, 两轴的方向重合, 这时旋转运动到底是由 θ_{j1} 还是 θ_{j2} 产生无法加以区别。当 $\theta_{j3} = n\pi$ 时, 都会出现这种状况。在多体系统的建模仿真实践中, 当对含有球铰的系统进行仿真时, 已出现数值病态问题。为此, 对 $\theta_{j3} = n\pi$ 的情况进行分析, 以查明是在哪个环节上可能引起数值病态问题, 并研究解决的办法。

1 Lagrange 方程的病态分析

多体系统 Lagrange 动力学方程的一般形式为:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_N]$ 为广义坐标向量。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为 $N \times N$ 矩阵, $\boldsymbol{Q}$ 为广义力向量。一般来说, 系统的运动 $\boldsymbol{q}(t)$ 应是以上动力学方程的唯一解。但当球铰 O_j 的 $\theta_{j3} = n\pi$ 时, θ_{j1} 和 θ_{j2} 无法分辨。只知道 $\dot{\theta}_{j1} + \dot{\theta}_{j2}$ 为已知量, 只要 $\theta_{j1} + \theta_{j2}$ 等于转动量, 就可以描述此时 O_j 铰的转动。这说明在这种情况下的运动由欧拉角的描述不唯一, 多体动力学方程可以有多个解。这意味着多体动力学方程组在这一时刻 ($\theta_{j3} = 0$) 的固化系数的线性方程组是线性相关的, 且矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 不满秩。对这一点作如下分析:

设 $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{X}$, 则 $\dot{\boldsymbol{X}} = \ddot{\boldsymbol{q}}$, (1) 式的自由运动方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) & O \\ O & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{X}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{X}) & O \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{2}$$

以上固化系数的方程解的情况为: 固化系数的线性方程组是否有唯一解取决于方程组是否线性相关。若对于任意的 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 满秩, 即任意时刻的固化系数的线性方程组有唯一解, 则多体系统动力学方程 (2) 有唯一解 $\boldsymbol{q}(t)$。当在某一时刻

* 收稿日期: 2000-04-06
基金项目: 国家部委基金资助项目 (4 1.1.12)
作者简介: 黄新生 (1955-), 男, 副教授, 硕士。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) & O \\ O & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{3}$$

不满秩时，即存在某个 $\boldsymbol{q}^*$，使 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}^*)$ 不满秩，方程组仍可能线性无关，方程组 (2) 中的某个微分方程退化为代数方程 (约束方程)，固化系数的线性方程组阶次降低，系统总自由度下降。这时，解的表示式推导必须另行处理，且数值积分求解也需特殊处理。

虽说多体系统动力学方程 (2) 可能出现退化情形，甚至出现线性相关情况，但其动力学方程的描述并没有错误，在特定情形下出现退化情形甚至出现解的不唯一性 (线性相关情况)，说明这时描述系统的运动可以有多种形式，只要找到动力学方程的一个解，也就找到了运动的一个描述。

然而 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的不满秩给动力学方程的求解带来了极大困难。在数值求解中，动力学方程必须转化成如下形式，再积分求解：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{X}) & O \\ \boldsymbol{I} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{4}$$

由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 不满秩，或者接近线性相关时，$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{q})$ 的计算出现数值病态问题。方程是时变的，这种不满秩是在某一状况下，于某一时刻出现的；一旦出现病态计算，仿真运算就无法继续进行。通常 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 的表示式极复杂。

结论　当某一个时刻 t，球铰的 $\theta_{j3}=0$(或 $n\pi$)，这时的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 阵不满秩。

证　由 $\theta_3=0$(或 $n\pi$)，则 $\boldsymbol{P}_{j1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{j2}$ 轴同向(或反向)，θ_{j1} 和 $\dot{\theta}_{j1}$ 是绕 P_{j1} 转动的，而 θ_{j2} 和 $\dot{\theta}_{j2}$ 是绕 P_{j2} 轴转动的，这时变为方向相同 (或相反)。

$$\dot{\theta}_{j1} = k\dot{\theta}_{j2} \tag{5}$$

式中，k 是一个标量(但不一定是常数)。对于任一函数 $N(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$，偏导数 $\dfrac{\partial N}{\partial \dot{q}_j}$ 表示函数 $N(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$ 沿 $\dot{q}_j$ 坐标轴方向的导数，设 $\dot{\theta}_{j1}$ 和 $\dot{\theta}_{j2}$ 在 N 维广义坐标系中表示为 $\dot{q}_x$，$\dot{q}_y$，由于坐标轴方向相同，显然有

$$\frac{\partial N}{\partial \dot{q}_x} = k\frac{\partial N}{\partial \dot{q}_y} \tag{6}$$

另一方面由 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

T 是 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的函数 $T(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$，可知 $\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}}$ 中不会出现 $\ddot{\boldsymbol{q}}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7}$$

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\partial \boldsymbol{q}}$ 中也不会出现 $\ddot{\boldsymbol{q}}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 的表示式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{8}$$

由式 (6) 取 $N = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ 时，$\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_x \partial \dot{q}_j} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_y \partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, N)$ (9)

由式 (9) 可知，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 阵的第 x 行与第 y 行成比例。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ 不满秩，得证。

对于球铰 $\theta_{j3}=n\pi$ 是无法避免的。由于这时 $\dot{\theta}_{j1}$ 与 $\dot{\theta}_{j2}$ 描述同样的运动，可以规定由 $\dot{\theta}_{j2}$ 来描述这个方向的旋转变化，固定 θ_{j1} 不变，即通过人为地增加约束来求解。

若对 O_j 铰 $|\theta_{j3}-n\pi| \leqslant \varepsilon$，可令

$$\dot{\theta}_{j1} = 0\ ; \qquad \sin\theta_{j3} = 0.0001$$

这样，方程的解是唯一确定的。(若有多个球铰同时出现 $\theta_{j3}=n\pi$，则可引入多个约束)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) & O \\ O & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{X}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{X}) & O \\ \boldsymbol{I} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\dot{\theta}_{j1} = 0$$

合并为:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) & O \\ O & \boldsymbol{I} \\ 0\cdots01 & 0\cdots0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{x}) & O \\ \boldsymbol{I} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{11}$$

写为

$$\boldsymbol{A}_1 \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_1)^{-1} \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为$(2N+1)\times 2N$ 阵, 上式是可积分求解的, 且$(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1)$ 是满秩的。当出现 $\theta_{j3} < \varepsilon$时, 可通过更换积分模型求解, 即把模型(2) 换为模型(12); 当 $\theta_{j3} \geqslant \varepsilon$时再换回模型(2)。但由于$\boldsymbol{A}$ 阵本身很庞大, 而且模型(12) 根据 $\theta_{j3} = n\pi$ 是哪个铰或者有几个铰同时出现, 将对模型运算结构信息(如 $\boldsymbol{A}_1$ 的维数) 有影响, 各种情况的出现具有任意性, 因此模型(12) 需要在线生成, 其计算工作量较大, 解决这一问题的另一办法是对于球铰选择 ω_x, ω_y, ω_z 作为广义速度的伪坐标方法。

2 混合伪坐标的 Lagrange 方程

若对于六自由度的铰采用伪坐标, 对具有三个旋转自由度的铰也可将其旋转自由度采用伪坐标, 而其它铰仍采用广义坐标, 这种真伪坐标混用的方法称为混合坐标法。

航天器的结构模式, 大多由一中心体与若干附属体组成, 中心体一般为六个自由度, 附属体转动自由度小 (附属体很少用球铰), 对此类结构模式采用混合坐标法比较方便, 中心体用伪坐标, 附属体用广义坐标。下面给出相应伪坐标的拉格朗日方程。

设系统由 n 个刚体组成, BD_1 体为三个转动自由度, 三个位置自由度, 且称为中心刚体, 其伪坐标为

$$\omega_1 = [\omega_{x1}\ \omega_{y1}\ \omega_{z1}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = [V_{x1}\ V_{y1}\ V_{z1}]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{V}_1$ 设为 BD_1 体质心速度, 其余 BD_i 体用广度坐标$\boldsymbol{q}_i$ 表示, $\boldsymbol{q}_i$ 的分量含有平移铰与转动铰的坐标, 系统的混合坐标微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) + \omega_1 \times \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \boldsymbol{V}_1 \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{V}_1} = \boldsymbol{L}_1 \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{V}_1}\right) + \omega_1 \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{V}_1} = \boldsymbol{Q}_{V1} \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}_i} = \boldsymbol{Q}_i,\ i = 2, 3\cdots n \tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{Q}_{V1}$ 为中心体的控制力矩和外力, $\boldsymbol{Q}_i$ 是对应于广义坐标$\boldsymbol{q}_i$ 的广义力。

式(14) 是体坐标系原点 o 的运动方程, (13) 是体坐标系绕 o 点转动的方程。这两组方程对应于伪坐标, 描述该体的六个自由度。式(15) 是一般的拉格朗日方程, 对应于其他体的真坐标。以上方程没有病态计算问题。

采用伪坐标建立动力学方程, 并不是完全替换对应铰的欧拉角描述, 实际上欧拉角的描述还是必须的, 主要是在确定各体之间的坐标变换需要欧拉角。确定运动的位置需要广义坐标, 所以还需建立伪坐标与欧拉角的关系。通过 ω_1 和 $\theta_{1s}(s = 1, 2, 3)$ 的关系, 将$\theta_{1s}(s = 1, 2, 3)$ 的表示式与动力学方程一起进行积分运算可获得欧拉角。

伪坐标的运动学关系为

$$\omega_1 = \boldsymbol{A}_{\omega 1}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_{11}\\ \dot{\theta}_{12}\\ \dot{\theta}_{13}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta_{11}\sin\theta_{13} & \cos\theta_{11} \\ 0 & \cos\theta_{11}\sin\theta_{13} & -\sin\theta_{11} \\ 1 & \cos\theta_{13} & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_{11}\\ \dot{\theta}_{12}\\ \dot{\theta}_{13}\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{\omega_1}^{-1}\omega_1 = \frac{1}{\sin\theta_{13}}\begin{bmatrix} -\cos\theta_{13}\sin\theta_{11} & -\cos\theta_{11}\cos\theta_{13} & -\sin\theta_{13} \\ \sin\theta_{11} & \cos\theta_{11} & 0 \\ \cos\theta_{11}\sin\theta_{13} & \sin\theta_{11}\sin\theta_{13} & 0 \end{bmatrix}\cdot\omega_1 \tag{17}$$

由(17)式数值积分可得到下一步的 θ_{1s}, 显然, 当 $\theta_{13}=0$ 时, 逆不存在, 即 $|\theta_{13}|<\varepsilon$ 时, 引起数值病态计算。可作如下处理:

由(16)式当 $\theta_{13}=0$ 时

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\theta_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\theta}_{11}\\ \dot{\theta}_{12}\\ \dot{\theta}_{13}\end{bmatrix} \tag{18}$$

这时 $\dot{\theta}_{11}$ 与 θ_{12} 同方向, 描述旋转变化的作用相同, 可固定一个不变, 用一个描述旋转, 因此引入约束 $\dot{\theta}_{11}=0$, 结合上式可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{11} &= 0 \\ \dot{\theta}_{12} &= \omega_{1z} \\ \dot{\theta}_{13} &= \frac{1}{\cos\theta_{11}}\omega_{1x} \end{aligned} \tag{19}$$

当 $|\cos\theta_{11}|<\varepsilon$ 时, 可令 $\dot{\theta}_{13}=k_{max}\omega_{1x}$。当 $\omega_{1x}\neq 0$ 时, 系统很快地脱离 $|\theta_{13}|<\varepsilon$ 的情形; 在 $|\theta_{13}|\geqslant\varepsilon$ 后, 重新采用(17)式计算。这种处理方法只替换 $|\theta_{13}|<\varepsilon$ 对应 θ_{1s} 的方程, 修改部分很小, 几乎不增加计算量, 处理起来很方便。ε 的选择要适当, 过大会影响计算精度, 过小有可能仍出现病态。

3 结论

运用混合伪坐标的 Lagrange 方法对空间五体机械臂的伸展进行动力学仿真, 选择 $\varepsilon=10^{-4}$, 既避免了病态计算的出现, 又较好地保证了计算精度, 在计算机符号推演模型的基础上, 根据特殊欧拉角的出现, 替换某个方程。操作过程直观、简单, 而且附加的计算量较小。

参考文献:

[1] Shabana A A. Dynamics of Multibody Systems [M]. Tohn Wiley & Sons, New york, 1989.

[2] 黄圳圭, 赵志建. 大型航天器动力学与控制 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1991.

[3] 黄新生, 黄圳圭, 朱小谦. 多刚体系统计算机代数动力学建模研究 [J]. 国防科技大学学报, 1998, 20 (2): 8-12.