文章编号: 1001-2486 (2000) 04-0023-04

平面NURBS 曲线的椭圆弧自适应逼近*

王兴波, 李圣怡

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 给出了用椭圆弧及双椭圆弧自适应逼近平面 NURBS 曲线的算法。算法所得到的椭圆样条能够 G^1 连续, 双椭圆样条还能够保形。与现行的圆弧逼近算法相比, 本算法不需要求解非线性方程组, 而是由给定的插补误差自动计算参数增量, 得到椭圆曲线的特征点, 还可以将误差控制在预期的范围之内; 与现行的直线插补方法相比, 不需要额外的时间和空间, 也适用于 CNC 环境。本算法在腔体加工、二维轮廓加工等方面有特别的实用价值。

关键词: NC 加工; NURBS 曲线; 曲线逼近; 插补

中图分类号: O241.5 文献标识码: A

Auto-adaptable Approximation of Planar NURBS Curve with Ellipse Arc

WANG Xing-bo, LI Sheng-yi

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: An algorithm to approximate a planar NURBS curve by ellipse-arc and bi-ellipse-arc is presented. The piecewise ellipse-arc spline calculated by this algorithm is G^1 continuous, and shape preserving. Compared with the present arc-approximation, this algorithm does not need equation-solving, and enable an automatic choice of parameter increment responding to the given interpolation tolerance in calculation of the character points of ellipse-arc. The algorithm also has advantage in approximation error control, which can control the approximation error to an expected one. Compared with present line-approximation mode, this algorithm, which needs no extra time and space in calculation, is applicable to CNC environment. The algorithm is specially valuable in cavity and contour machining.

Key words: NC machining; NURBS curve; approximation to a curve; curve interpolation

NURBS 曲线曲面以其对圆锥曲线完整的数学描述而享誉于 CAD/ CAM 应用领域, 因此 STEP 标准将 NURBS 曲线面规定为曲线曲面设计造型的基本工具。然而目前在 CAD/ CAM 领域里却存在着这样的现象: CAD 通过 NURBS 曲线设计的产品在 CAM 加工时, 通常被按照直线插补处理。这种直线插补通常通过增加直线段的数量来保证插补精度, 其结果导致数控程序代码的增加。除此之外, 直线插补无法得到严格光滑的曲线, 因此圆弧或双圆弧插补是经典的光滑插补的方法[1~6]。然而, 正如 Meek 在他自己的文章里总结的一样, 现行的圆弧插补方法在算法存在以下不足: 计算圆弧的特征点需要进行求解非线性方程组, 人们只能进行误差估计而不能进行误差控制, 有时曲线只能达到 G^0 连续。

随着机床技术的发展, 现代机床不仅能够接受直线、圆弧作为其插补数据, 而且能够接受椭圆曲线作为其插补数据[7,8], 因此研究 NURBS 曲线的椭圆曲线插补是非常有意义的。本文就给出一个用椭圆弧及双椭圆弧逼近 NURBS 平面曲线的算法。

1 预备知识: NURBS 曲线与有理 B zier 曲线

1.1 NURBS 曲线及其属性

NURBS 曲线[9]具有如下形式的分段有理多项式矢量曲线:

* 收稿日期: 1999-12-24
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (99YJJ2005); 国家杰出青年基金资助项目 (59725511)
作者简介: 王兴波 (1963-), 男, 讲师, 硕士。

$$R(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\omega_i} \tag{1}$$

这里 ω_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 称为权因子, P_i 称为控制点, $N_{i,p}(u)$ 是 p 次规范化 B-样条基函数:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & u \in (u_i, u_{i+1}) \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \left(\frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}\right) N_{i,p-1}(u) + \left(\frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_i}\right) N_{i+1,p-1}(u) \tag{2}$$

u_i 为节点序列 $U = \{u_0, u_1, \cdots, u_m\}$ 的节点, $m = n + p + I$, I 为段数。

根据 NURBS 曲线的性质, 在区间参数 $[u_I, u_{I+1}]$ 上, 只有 P_{I-P}, P_{I-P+1}, …, P_I 对曲线起作用。Farin 给出了曲线 $R(u)$ $(u_I \leqslant u \leqslant u_{I+1})$ 的算法[10]:

For $(i = I - p;\ i \leqslant I;\ i{+}{+}$

$P_{i,0}(u) = P_i$;

For $(k = 1;\ k \leqslant p;\ k{+}{+}$

For $(i = I - p;\ i \leqslant I;\ i{+}{+}$

{

$$\alpha_{i,k} = \frac{u - u_i}{u_{i+p+1-k} - u_i} \tag{3}$$

$$\omega_{i,k} = (1 - \alpha_{i,k})\,\omega_{i-1,k-1} + \alpha_{i,k}\,\omega_{i,k-1} \tag{4}$$

$$\omega_{i,k} P_{i,k} = (1 - \alpha_{i,k})\,\omega_{i-1,k-1} P_{i-1,k-1} + \alpha_{i,k}\,\omega_{i,k-1} P_{i,k-1} \tag{5}$$

}

那么 $R(u) = P_{I,p}$。

Floater 证明了 NURBS 曲线切于矢量:

$$R'_{I,p}(u) = \lambda_{I,p}(u)\,(P_{I,p-1}(u) - P_{I-1,p-1}(u)) \tag{6}$$

并估计了导矢的范围[11]

$$\| R'(u) \| \leqslant p \frac{W^2}{\omega^2} \max\left\{ \frac{\| P_i - P_{i-1} \|}{u_{i+p-1} - u_{i-1}} \right\} \tag{7}$$

这里 $W = \max\{\omega_i\}$, $\omega = \min\{\omega_i\}$。

1.2 有理 B zier 曲线及其性质

有理 B zier 曲线是 NURBS 曲线的一种特例。其形式如下:

$$R(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)\omega_i}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \tag{8}$$

这里 $B_{i,n}(u)$ 为 Bernstein 基函数。

有理 B zier 曲线通过 P_0、P_n 且切于 P_0P_1、$P_{n-1}P_n$。

当 $n = 2$ 时, $R(u)$ 为一段圆锥曲线。这时 $\omega_1 < \omega_0 = \omega_2$ 表示椭圆弧。由三点 P_1, P_2, P_3 表示的圆锥曲线 $R(u)$ 具有肩点性质, 即: 如果 $\omega_0 = \omega_2 = 1$, $M = (P_0 + P_2)/2$, 则肩点 S 为

$$S = (1 - s)M + sP_1 \tag{9}$$

这里:

$$s = \omega_1/(1 + \omega_1) = 1/(1 + 1/\omega_1)$$

2 椭圆弧逼近 NURBS 曲线的误差分析

误差是曲线对曲线逼近好坏的一个指标。直线插补 NURBS 曲线的误差已经由 Filip[12] 给出。由

Filip 的结果知道，直线插补的最大误差取决于参数的增量。在这一节将证明，通过选择权因子 ω_1，可以将椭圆插补的误差控制在人们期望的范围之内，并且椭圆插补在误差控制方面将优于双曲线插补和抛物线插补。以下是结果及证明。

定理 1　设 $r(t)$ 是一段光滑凸曲线，P_0，P_2 是 $r(t)$ 上的两点，P_1 是 $r(t)$ 过 P_0，P_2 切线的交点，$R_2(t)$ 表示由 P_0、P_1、P_2 生成的有理 B zier 曲线，δ 分别表示曲线 $r(t)$ 与直线 P_0P_2 的最大弓高距离，e 表示曲线 $R_2(t)$ 对 $r(t)$ 逼近的误差，H 是三角形 $P_0P_1P_2$ 在 P_0P_2 上的高；那么选择 $\omega_0=\omega_2=1$，$\omega_1\leqslant\delta/(H-\delta)$ 可使 $e\leqslant\delta$。

证明　由 (9) 知，s 越小则 ω_1 越小，因此选取这样的 s 使得 $0< s\cdot H\leqslant\delta$；根据二次有理 B zier 曲线的肩点性质及相似三角形的比例性知 $|e|=|\delta-s\cdot H|\leqslant\delta$。利用 (9) 将 $s\cdot H\leqslant\delta$ 整理即得到定理结果。

通过定理 1 可知，椭圆弧对曲线的逼近误差将优于双曲线弧和抛物线弧，因为后二者的 $\omega_1\geqslant 1$。

定理 2　设 $r(t)$ 是光滑曲线，$M=\max\|r'(t)\|$，$m=\min\|r'(t)\|$；那么对于给定的参数增量 Δt $\|r(t)\|$ 的最大增量满足下式：

$$m\Delta t\leqslant\|\Delta r(t)\|\leqslant M\Delta t$$

证明　由积分中值定理及给定条件，即得到结论。

3　椭圆弧逼近平面 NURBS 曲线的算法

NURBS 曲线的属性告诉我们，在计算 NURBS 曲线上一点之前，该点的切矢已经计算好。这也意味着，只要计算出平面 NURBS 曲线上两点，就可能由这两点及其切矢的交点得到一段二次有理 B zier 曲线。因此对于凸的 NURBS 曲线，我们有如下算法。

3.1　平面凸 NURBS 曲线椭圆弧插补算法

对于在区间 $[u_I, u_{I+1}]$ 上的凸平面 NURBS 曲线，可用以下步骤计算：

Setp 1. 计算 $R(u)$ 在 $[u_{I-1}, u_{I+p-1}]$ 上的 $M=\max\|R'(t)\|$ 及最小曲率半径 ρ；

Setp 2. 根据插补误差 δ，计算：

$$L=2\sqrt{2\rho\delta(\rho-\delta)},\quad \Delta u\leqslant L/M$$

Setp 3. 取 $u_0=u_I$，由 (3)、(4)、(5) 式计算 $P^0_{I-1,p-1}$，$P^0_{I,p-1}$，$P^0_{I,p}$

Setp 4. 循环（以下是 C 语言的伪代码）

for (; ;)

{if $(u+\Delta u>u_{I+1})$ $u=u_{I+1}$;

else $u+=\Delta u$;

由 (3)、(4)、(5) 计算 $P^2_{I-1,p-1}$，$P^2_{I,p-1}$，$P^2_{I,p}$；

$P'_{I,p}=$ Intersection $(P^0_{I-1,p-1}P^0_{I,p-1}, P^2_{I-1,p-1}, P^2_{I,p-1})$；

$H=$ Distance $(P^1_{I,p}, P^0_{I,p}, P^2_{I,p})$；

$\omega_0=\omega_2=1$，$\omega_1\leqslant\delta/(H-\delta)$；

$R_2(u)=$ RationalB zier $(P^0_{I,p}, P^1_{I,p}, P^2_{I,p}, \omega_0, \omega_1, \omega_2)$；

$P^0_{I-1,p-1}=P^2_{I-1,p-1}$，$P^0_{I,p-1}=P^2_{I,p-1}$，$P^0_{I,p}=P^2_{I,p}$；

if $(u\geqslant u_{I+1})$ break; }

3.2　任意平面 NURBS 曲线的双椭圆弧插补算法

椭圆弧插补仅适用于与凸曲线的插补，对于有拐点的曲线，两点的切线未必有交点，因此需要用双椭圆弧插补的方法。

Setp 1. 计算 $R(u)$ 在 $[u_{I-1}, u_{I+p-1}]$ 上的 $M=\max\|R'(u)\|$ 及最小曲率半径 ρ；

Setp 2. 根据插补误差 δ，计算：

$$L=2\sqrt{2\rho\delta(\rho-\delta)},\quad \Delta u\leqslant L/M$$

Setp 3. 取 $u_0=u_I$，由 (3)、(4)、(5) 式计算 $P^0_{I-1,p-1}$，$P^0_{I,p-1}$，$P^0_{I,p}$

Setp 4. 循环（以下是C语言的伪代码）

for (; ;)

{if ($u+\Delta u>u_{I+1}$) $u=u_{I+1}$;

else $u+=\Delta u$;

由(3)、(4)、(5) 计算 $P^{12}_{I-1,p-1}$, $P^{12}_{I,p-1}$, $P^{12}_{I,p}$;

$P^{20}_{I-1,p-1}=P^{12}_{I-1,p-1}$, $P^{20}_{I,p-1}=P^{12}_{I,p-1}$, $P^{20}_{I,p}=P^{12}_{I,p}$;

if ($u+\Delta u>u_{I+1}$) $u=u_{I+1}$;

else $u+=\Delta u$;

由(3)、(4)、(5) 计算 $P^{22}_{I-1,p-1}$, $P^{22}_{I,p-1}$, $P^{22}_{I,p}$;

$P^{11}_{I,p}=$ Intersection ($P^{10}_{I-1,p-1}P^{10}_{I,p-1}$, $P^{12}_{I-1,p-1}$, $P^{12}_{I,p-1}$);

$P^{21}_{I,p}=$ Intersection ($P^{20}_{I-1,p-1}P^{20}_{I,p-1}$, $P^{22}_{I-1,p-1}$, $P^{22}_{I,p-1}$);

$H_1=$ Distance ($P^{11}_{I,p}$, $P^{10}_{I,p}$, $P^{12}_{I,p}$);

$H_2=$ Distance ($P^{21}_{I,p}$, $P^{20}_{I,p}$, $P^{22}_{I,p}$);

$\omega^1_0=\omega^1_2=1$, $\omega^1_1\leqslant\delta/(H_1-\delta)$;

$\omega^2_0=\omega^2_2=1$, $\omega^2_1\leqslant\delta/(H_2-\delta)$;

$R_{21}(u)=$ RationalB zier ($P^{10}_{I,p}$, $P^{11}_{I,p}$, $P^{12}_{I,p}$, ω^1_0, ω^1_1, ω^1_2);

$R_{22}(u)=$ RationalB zier ($P^{20}_{I,p}$, $P^{21}_{I,p}$, $P^{22}_{I,p}$, ω^2_0, ω^2_1, ω^2_2);

$P^{10}_{I-1,p-1}=P^{20}_{I-1,p-1}$, $P^{10}_{I,p-1}=P^{20}_{I,p-1}$, $P^{10}_{I,p}=P^{20}_{I,p}$;}

4 结语

通过前面分析和算法可以总结出椭圆弧、双椭圆弧逼近NURBS曲线的以下特点:

- 分段椭圆弧是 G^1 连续的;
- 可以通过选择权因子控制每段的逼近误差;
- 与现有的直线插补比较, 没有增加额外的时间和空间;
- 自行计算参数增量;
- 逐段计算的过程适应CNC环境。

由于有理B zier曲线是NURBS曲线的特例, 本文的方法也适用于对有理B zier曲线的逼近。另外, 由于本文讨论的是平面的情形, 而数控加工中对腔体的加工通常是采用二维轮廓加工的方法实现, 因此本文方法对于腔体和二维轮廓加工的前置处理有非常明显的价值。

参考文献:

[1] Bolton K M. Biarc curve [J]. CAD, 1975, 7 (3): 89-92.

[2] 孙家昶. 曲线的圆弧与双圆弧逼近[J]. 计算数学, 1981, (2): 97-112.

[3] Ahn, Y J, et al. G^1 arc spline approximation of quardratic B zier curves [J]. CAD, 1988, 30 (8): 615-620.

[4] Meek D S, et al. Approximation of discrete data by G^1 arc spline [J]. CAD, 1992, 24 (6): 301-306.

[5] Meek D S, et al. Approximation quardratic NURBS curves by arc spline [J]. CAD, 1993, 25 (6): 371-376.

[6] Ong C J, et al. An optimization approach for biarc curve-fitting of B-spline curves [J]. CAD, 1996, 28 (12): 951-959.

[7] 冉树成等. 数控系统中椭圆插补功能的研究与实现 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 1995, (1): 18-24.

[8] 朱国力等. 基于圆心角分割的椭圆插补算法[J]. 机械工业自动化, 1996, 18 (1): 41-43.

[9] Piegl L. On NURBS [J]. IEEE CG&A, 1991, 11 (1): 55-71.

[10] Farin G. Curves and surfaces for CAGD [M]. Academic Press, San Diego, 1988.

[11] Floater M S. Evaluation and properties of the derivative of a NURBS [A]. In: Lyche, T. And Schumaker, L. L. eds. Mathematical Methods in CAGD [C]. Academic Press, Boston, 1992, (2): 261-274.

[12] Filip D, et al. Surface algorithms using bounds on derivatives [J]. CAGD, 1996, (3): 295-311.