

文章编号: 1001-2486 (2000) 04-0094-04

基于多分辨分析的数值积分算法*

郭汉伟, 何建国, 尹家贤, 刘培国, 刘克成

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 从多分辨分析思想出发, 推导出一种计算数值积分的算法, 通过加强迫函数改善其精度。利用张量扩张的原理, 将其推广到计算多维数值积分。结果表明, 它不但与传统的 Simpson 算法有较好的一致性, 而且对于震荡积分也有较高的精度。

关键词: 多分辨采样; 积分

中图分类号: O241.4 文献标识码: A

The Numerical Integral Algorithm Based on Multiresolution Analysis

GUO Han-wei, HE Jian-guo, YIN Jia-xian, LIU Pei-guo, LIU Ke-cheng

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A new numerical integral algorithm is presented according to the idea of multiresolution sampling. Its precision is improved by the forcing function. It's easy to use in high-dimensions integral by tensor extending method. The results show that it is not only in good agreement with traditional Simpson algorithm but also more precise to appreciate the high-vibrating integral.

Key words: multiresolution sampling; integral

积分是最基本的数值计算问题。通常我们采取内插求积公式(柯特斯公式)和高斯型求积公式来计算。以上两种算法的基本思想是, 在有限区间内对函数用 Lagrange 插值多项式进行拟合加以计算。对于正则性较好的函数, 传统的积分算法具有很高的计算效率。但是对于正则性较差, 快速震荡函数, 传统的积分算法计算的效率很低, 甚至不能得到正确结果。如果用多分辨分析中的尺度函数作为基函数, 在有限区间内对被积函数进行插值拟合, 我们可以根据被积函数的特性来选取基函数。尺度函数选取的灵活性带来积分算法的灵活性, 特别是对于正则性较差, 快速震荡的函数, 可以取得很好的结果。

1 算法的推导

根据 [1], 定义一个多分辨分析 $\{V_j\}$, 如果 $\varphi(x)$ 是具有 $2N-1$ 紧支撑区域的尺度函数, $L^2(R)$ 空间内函数 $f(x)$ 在多分辨分析 $\{V_j\}$ 下可以近似表示为:

$$f(x) \approx A_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \quad (1)$$

其中 $C_{j,k} = \langle f(x), \varphi_{j,k} \rangle$, 是函数在 j 水平下的多尺度采样系数^[2], $\varphi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的对偶函数^[3]。则上式的截断误差为 $\|f(x) - A_j f(x)\| \leq C 2^{-jN}$, C 为一个只与基函数相关的正的常数。

而 $\int_L \varphi(x) dx = 1$, 故

$$\int_L \varphi_{j,k}(x) dx = \int_L 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) dx = 2^{-j/2} \quad (2)$$

L 为积分区间。那么,

$$\int_L f(x) dx = 2^{-j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k} \quad (3)$$

* 收稿日期: 2000-01-15

作者简介: 郭汉伟 (1975), 男, 硕士生。

由小波分析原理, 我们可以看到这样一个事实:

$$\int_L f(x) dx = 2^{-j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k} = 2^{-(j+1)/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j-1,k} = 2^{-(j+2)/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j-2,k} \quad (4)$$

即 $f(x)$ 的积分可以表示为一维多尺度采样系数的线性迭叠加。如果计算 $f(x, y) \in L^2(R^2)$ 的二维积分,

$$f(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} C_{J_1, k_1, k_2} \phi_{J_1, k_1, k_2}(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} C_{J_1, k_1, k_2} \phi_{J_1, k_1}(x, y) \phi_{J_1, k_2}(x, y) \\ \iint f(x, y) dx dy = 2^{-J_1} \sum_{k_1, k_2 \in Z} C_{J_1, k_1, k_2} \quad (5)$$

可以看到, 利用张量扩张的方法, 很容易将其推广到多维积分算法。

1.1 多分辨采样系数的计算

$$C_{j,k} = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi(x-k)} dx = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2^j}\right) \overline{\phi(x-k)} dx = 2^{j/2} \langle f\left(\frac{x}{2^j}\right), \phi(x-k) \rangle \quad (6)$$

$$\text{假定 } \text{supp } \phi = [0, L], \quad \phi(0) = \phi(L) = 0 \quad (7)$$

$$C_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{n=1}^{L-1} f\left(\frac{n+k}{2^j}\right) \overline{\phi(n)}, \quad (m, n \text{ 是整数}) \quad (8)$$

这时^[3], $C_{j,k}$ 是 $f\left(\frac{n+1}{2^j}\right), f\left(\frac{n+2}{2^j}\right), \dots, f\left(\frac{n+L-1}{2^j}\right)$ 的一种加权平均。在正交小波时, $\phi(n)$ 用 $\overline{\phi(n)}$ 来代替。

1.2 函数的边界校正

对于积分 $\int_a^b f(x) dx$, 如果函数 $f(x)$ 在其边界点 a, b 处不为零, 那么, 用具有紧支撑的正交与双正交小波对 $f(x)$ 进行抽样后再恢复, 在边界点处将出现不收敛于真值的现象, 这类似于利用傅立叶级数展开有限区间的函数在边界点处的莱不尼兹现象。为了消除边界点不为零对积分精度的影响, 我们采用加强迫函数 (Forcing function) $F(x)$ 的方法, 对 $f(x)$ 进行边界校正, 使校正后的函数 $f'(x)$ 在边界点 a, b 处的值为零。我们构造强迫函数 $F(x)$, 使其满足以下条件:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + F(x) \\ f'(a) = f'(b) = 0 \\ \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f'(x) dx \end{cases} \quad (9)$$

即

$$\begin{cases} F(a) = -f(a) \\ F(b) = -f(b) \\ \int_a^b F(x) dx = 0 \end{cases} \quad (10)^*$$

如果设 $F(x) = cx^2 + dx + e$ 带入 (10), 我们可以得到:

$$\begin{cases} c = \frac{-3 \cdot (f(b) + f(a))}{(a-b)^2} \\ d = \frac{2 \cdot (2 \cdot a \cdot f(b) + f(a) \cdot b + b \cdot f(a) + 2 \cdot f(a) \cdot b)}{(a-b)^2} \\ e = \frac{-(f(b) \cdot a^2 + 2 \cdot f(a) \cdot a \cdot b + 2 \cdot f(b) \cdot a \cdot b + f(a) \cdot b^2)}{(a-b)^2} \end{cases} \quad (11)$$

1.3 公式的简化

而 $\sum_{n=1}^{L-1} \phi(n) = 1$, 那么, 在采样系数叠加的过程中, 可以作相应的简化。

* 关于 $F(x)$ 的形式, 本人根据经验建议, 最好不要用分段的线形函数, 因为分段的直线在分段区间的端点处是不可微的。

$$\int_a^b f(x) dx = 2^{-j} \left[\sum_{k=m_1+1}^{m_1+L-2} f' \left(\frac{k}{2^j} \right) \sum_{s=1}^{k-m_1} \phi(s) + \sum_{k=m_1+L-1}^{m_2-L+2} f' \left(\frac{k}{2^j} \right) + \sum_{k=m_2+2}^{m_2+L-1} f' \left(\frac{k}{2^j} \right) \sum_{s=1}^{m_2+L-k} \phi(s) \right] \quad (12)$$

下面给出基于尺度函数计算数值积分的一般步骤:

1 根据精度选择采样空间和采样函数 (一般选 Daubechies 的尺度函数), 构造强迫函数 $F(x)$, 得到函数 $f(x)$ 的校正函数 $f'(x)$ 。

④在 $\{V_j\}$ 水平上对 $f'(x)$ 采样。

(四)按照公式进行计算。

如果采样函数为 Haar 小波尺度函数, 我们可以推导出梯形积分公式。而采样函数的灵活选择带来积分算法的灵活性。可以利用迭代得出可控制误差的基于多分辨分析的自适应积分算法^[4]。设所选的采样函数具有长度为 L 的支撑区间, 在 N 分辨水平上对函数进行多分辨采样积分, 要做 $2^* (L-2)$ 次乘法, $(b-a) * 2^N$ 次加法。

2 算例

例 1 如图 1 所示, 一个磁流环激励的对称线天线, 长度为 L , 半径为 a , 工作波长 λ_0 。天线由波克林顿方程

$$E_z^{(i)} | i = - \frac{1}{j4\pi \omega \epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') G_1(z, z') dz' \quad (13)$$

$$G_1(z, z') = \frac{e^{-jkr}}{r^3} [(1 + jkr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2]$$

来描绘。用脉冲基一点匹配的方法来求解, $a = 0.0025 \lambda_0$, $b = 0.005 \lambda_0$ 。这种方法实现简单, 但要想得到满意的结果, 需要 80~160 个采样点。阵元计算如下积分式:

$$Z_{mn} = - \frac{1}{j4\pi \omega \mu_0} \int_{-L/2+(n-1)\Delta z}^{-L/2+n\Delta z} G_1(z, z') dz' \quad (14)$$

对于上式, 采用基于多分辨分析的数值积分算法计算, 由于所计算的问题是对称的, 选择双正交 Bior2.2 小波重构尺度函数为基函数, 可以得到 100×100 矩阵。从图 2 可以看出, 基于多分辨分析的自适应数值积分算法求得结果与经典的 Simpson 算法有很好的—致性。

例 2 计算 $\int_0^1 e^{-x} \sin(1000\pi x) dx$, 可以看到, 它的被积函数是一个快速衰落震荡函数, 它的真实解为: $3.124798055929105e-004$, 用 Simpson 算法得不到正确结果。如果我们用本文的方法, 选取下面一组双正交小波的尺度函数为采样函数。在 $j=24$ 阶水平下采样, 得到结果为 $3.12479805589876e-004$ 。相对误差 $9.5996e-008$, 绝对误差 $2.9997e-011$ 。

$$\{hk\} = \{83/1300, -581/5200, -119/371, 371/650, 371/650, -119/5200, -581/5200, 83/1300\},$$

$$\{hk\} = \{-1/40, -7/160, 21/160, 7/16, 7/16, 21/160, -7/160, -1/40\}$$

3 结论

我们从多尺度采样的概念出发, 将 $L^2(R)$ 的函数 $f(x)$ 利用尺度函数展开, 推导出一种新的数值积分算法。通过张量扩张的办法, 很容易将其扩展到多重积分算法。结果表明, 只要选择好采样函数, 其不但可达到传统积分算法的精度, 而且对于快速震荡积分, 也有很好的精度和计算效率。

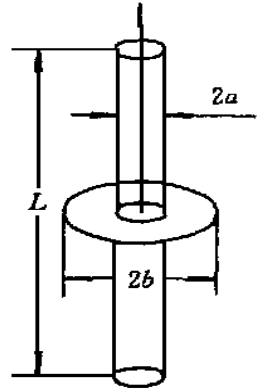


图 1 由磁流环激励的线天线
Fig 1 Line antenna excited by magnetic current loop

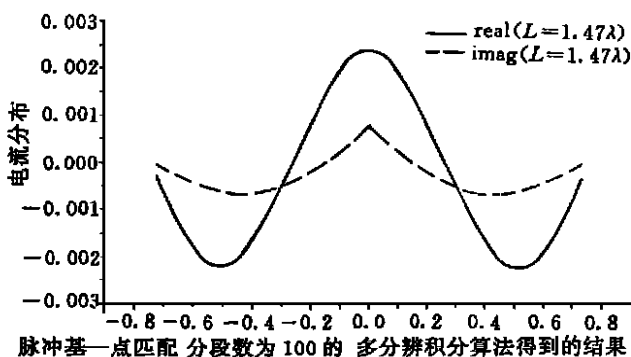
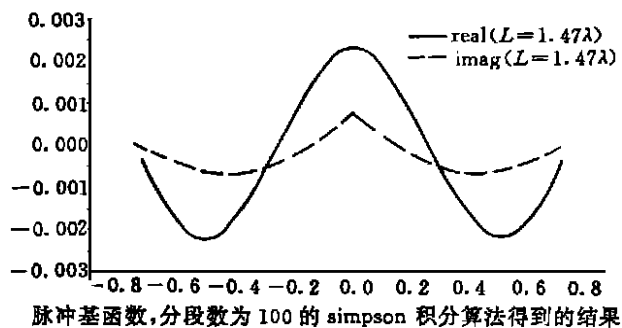


图2 对称振子天线表面电流分布

Fig. 2 The surface current distribution of dipole antenna

参考文献:

- [1] Ingrid Daubechies. Ten Lectures on Wavelets [A]. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics [C], Philadelphia, SIAM, 1992
- [2] Wang G Q. Multiresolution Sampling with Its Application [J]. Optical Engineering, 1998, 37 (6), 1703-1708.
- [3] 程正兴. 小波分析算法与应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [4] 郭汉伟. 小波分析在计算电磁学中的应用研究 [D]. 国防科技大学, 2000.