

文章编号: 1001-2486 (2000) 04-0102-05

## 基于等方性系数的地形可导航性的方向性研究\*

张国忠, 沈林成, 常文森

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 地形可导航性分析的研究中, 当飞行器从不同方向进入特定区域时, 怎样评价该区域提供的可导航能力一直是地形匹配中的重要问题。本文建立了地形本质特征的数学过程描述——分数布朗运动; 基于分形几何理论, 通过分析地形表面的轮廓谱矩和表面谱矩的特性, 提出一种地形特征度量值——等方性系数; 并且分别得出了等方性好与差时, 适配区域的匹配概率与方向之间的定性关系, 有助于提高地形可导航性分析的效率。

**关键词:** 地形形貌; 分数布朗运动; 分形几何; 等方性系数; 匹配概率

**中图分类号:** V249.3    **文献标识码:** A

## Isotropy-coefficient Based Directional Study of Terrain Navigability

ZHANG Guo-zhong, SHEN Lin-cheng, CHANG Wen-sen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In the research of terrain navigability, how to evaluate some terrain's navigability is an important problem at all times when aircraft fly into the terrain in different directions. This paper sets up a mathematical narration (FBM) according to the terrain's nature features. Through the analysis of the profile spectral moments and the surface spectral moments, a new measurement value of terrain feature — isotropy-coefficient is presented, which is based on the application of fractal geometry theory. This paper also derives the qualitative relation between matching probability of congruent terrain and different directions, which helps to improve the efficiency of navigability analysis.

**Key words:** terrain topography; Fractional Brownian Motion (FBM); fractal geometry; isotropy-coefficient; matching probability

地形可导航性分析是有限地形区域的一种性质, 该性质体现地形区域中沿特定方向的地形剖面提供平面位置信息的能力, 这种信息为采用TERCOM (Terrain Contour Matching) 技术的飞行器的惯性导航系统提供位置修正。

飞行器在飞入地形适配区时, 可以从不同方向进入 (如图1所示)。

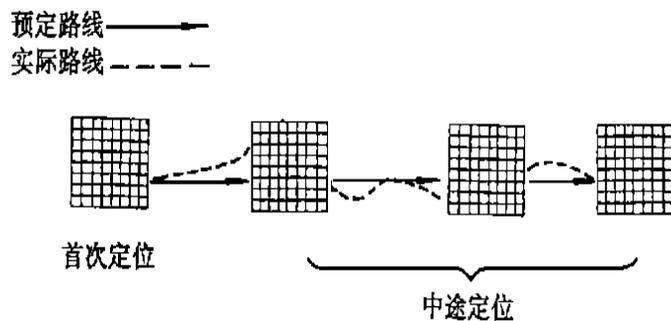


图1 典型的飞行器任务剖面

Fig. 1 Typical aircraft's mission profile

\* 收稿日期: 2000-01-18

作者简介: 张国忠 (1975), 男, 博士生。

这时，参与地形匹配的地形剖面就变化了，因此根据各个地形剖面计算出的统计特征度量值也可能改变，预先根据某一方向计算的地形特征度量值所选择的地形适配区在其它方向上不一定仍是地形适配区。因此为了全面评价地形区域的可导航性，必须考虑方向性的问题。

### 1 地形的数学过程描述

对地形可导航性的方向性进行研究，首先要确立地形的数学过程描述，这种数学过程描述所具备的本质特征应与地形的本质特征相吻合。B. B. Mandelbrot 深刻指出<sup>[1]</sup>，包括地形在内的大自然景观，都具有分形的特征。真实地形的本质特征：

- (1) Sayes 和 Thomas 指出自然地形是非平稳的<sup>[2]</sup>。
- (2) Berry 和 Hanny<sup>[3]</sup>进一步建立了地形的平方差异函数，得出地形的功率谱密度为

$$G(\omega) = 2\pi k(\omega)^{-\beta}$$

- (3) 自然地形的相似方式是统计意义上的自仿射变换。不难证明分数布朗运动 (FBM) 有与地形相类似的数学特征<sup>[4]</sup>。

### 2 基于分形理论分析地形谱矩的基本原理

分形学中 Weierstrass-Mandelbrot 函数 (W-M 函数) 有类似指数为  $\alpha$  的分数布朗运动上的数学特征，我们进行地形可导航性研究过程中，用于地形形貌表面轮廓的表征，分形维数为  $D$  的 W-M 函数形式如下<sup>[5,6]</sup>：

$$z(x, y) = G^{(D-1)} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi Y^n x}{Y^{(2-D)n}} \tag{1}$$

$z(x, y)$  为地形表面轮廓高程； $D$  为分形维数； $G$  为特征尺度系数； $Y$  为大于 1 的常数，对于近似服从正态分布的地形表面， $Y$  取 1.5 较为合适； $Y^n$  为随机过程的空间频率； $n_1$  与地形表面轮廓的最低截断频率相对应。

相应于 (1) 式的连续谱为  $P(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln Y} * \frac{1}{\omega^{(5-2D)}}$ ， $Y^{n_1} < \omega < +\infty$ ，进而可推出，地形轮廓在频带宽度  $\omega_l$  和  $\omega_h$  之间的零阶谱矩  $m_0$ ，二阶谱矩  $m_2$  和四阶谱矩  $m_4$  为

$$m_0 = \int_{\omega_l}^{\omega_h} P(\omega) d\omega = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln Y} * \frac{1}{(4-2D)} * \left[ \frac{1}{\omega_l^{(4-2D)}} - \frac{1}{\omega_h^{(4-2D)}} \right]$$

$$m_2 = \int_{\omega_l}^{\omega_h} \omega^2 P(\omega) d\omega = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln Y} * \frac{1}{(2D-2)} * [\omega_h^{(2D-2)} - \omega_l^{(2D-2)}]$$

$$m_4 = \int_{\omega_l}^{\omega_h} \omega^4 P(\omega) d\omega = \frac{G^{2(D-1)}}{2\ln Y} * \frac{1}{2D} * [\omega_h^{2D} - \omega_l^{2D}]$$

式中  $\omega_h$ ， $\omega_l$  为谱频率宽度上限、下限。

$$\omega_h = \frac{1}{\Delta}, \quad \omega_l = \frac{1}{L}; \quad \Delta \text{ 为高程取样间隔, } L \text{ 为采样长度。}$$

对于三维均匀的随机地形表面， $r$  阶轮廓谱矩和表面谱矩  $m_{r-q, q}$  定义如下<sup>[7]</sup>：

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^r P(\omega) d\omega \tag{2}$$

$$m_{r-q, q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^{r-q} \omega_2^q P(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \tag{3}$$

$\theta$  方向上的  $r$  阶轮廓谱矩  $m_r$  与表面谱矩  $m_{r-q, q}$ ，根据 Longuet-Higgins 等式，有如下关系：

$$m_r(\theta) = m_{r-q, q} C_q^r \cos^{(r-q)} \theta \sin^q \theta \tag{4}$$

在与参考方向成夹角  $\theta_i$  的三个方向上测量地形高程，由 (4) 式可求出地形表面的二阶谱矩：

$$\begin{bmatrix} m_{20} \\ m_{11} \\ m_{02} \end{bmatrix} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} m_2(\theta_1) \\ m_2(\theta_2) \\ m_2(\theta_3) \end{bmatrix}$$

$T_2$  为 Longuet-Higgins 等式的系数矩阵。表面二阶谱矩  $m_{20}$  和  $m_{02}$  为相互垂直的两个方向上的斜率方差, 而  $m_{11}$  为两个方向上的协方差。

在地形表面轮廓的表征中, 高度  $z(x, y)$  的变化从静态的观点描述了点在地形轮廓上的高度位置变化, 而  $z(x, y)$  的一阶导数却是从动态的观点描述点在地形表面或轮廓上移动时的高度变化率。

首先我们考察三条正弦曲线 (如图 2 所示) 的轮廓谱矩分析, 轮廓  $a$  和轮廓  $b$  的高度方差  $m_0$  相等, 但是斜率方差不同; 而轮廓  $a$  和  $c$  的高度方差不同, 但斜率方差相等。这说明对一个纯正弦曲线的轮廓, 其高度方差取决于此正弦曲线的幅值, 而斜率方差取决于幅值和频率的乘积, 二阶轮廓谱矩反映轮廓的斜率方差, 二阶表面谱矩反映表面的斜率方差。

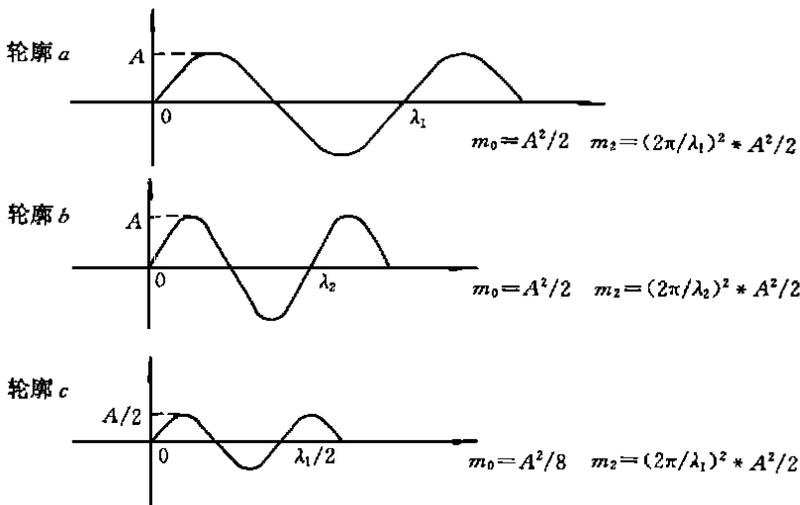


图 2 正弦曲线的轮廓谱矩分析

Fig. 2 Contour spectral moment study of sinusoidal curve

由 (4) 式可推出轮廓的二阶谱矩  $m_2(\theta)$  为<sup>[8]</sup>

$$m_2(\theta) = m_{20}\cos^2\theta + 2m_{11}\cos\theta\sin\theta + m_{02}\sin^2\theta \tag{5}$$

它不仅依赖于  $\theta$  值, 而且还与地形表面性质 (二阶表面谱矩) 有关。一般说来, 地形表面可以看作由无数个不同幅度、不同频率和不同相位的正弦波组成。对于均一的随机地形表面, 轮廓斜率方差最大值与最小值所在的方向是相互垂直的, 这两个方向称为主方向, 而斜率方差最大的那条轮廓曲线与  $x$  夹角称为主方向角  $\theta_p$ 。

由式 (5) 右端使其对  $\theta$  一阶导数为零:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2m_{11}}{m_{20} - m_{02}} \right]$$

进而可求得

$$m_{2\max} = \frac{1}{2} [M_2 + \sqrt{M_2^2 - 4\Delta_2}] \quad m_{2\min} = \frac{1}{2} [M_2 - \sqrt{M_2^2 - 4\Delta_2}]$$

式中

$$M_2 = m_{20} + m_{02} \quad \Delta_2 = m_{20} * m_{02} - m_{11}^2;$$

如果表面谱矩  $m_{20}$ ,  $m_{11}$  和  $m_{02}$  (或  $m_{2\max}$ ,  $m_{2\min}$  和  $\theta_p$ ) 已知, 则  $m_2(\theta)$  的轨迹就可以唯一地确定。

### 3 等方性系数

地形轮廓的斜率方差既可反映轮廓的幅度分布, 又可以反映频率特性, 而且一般情况下很强地依

赖于地形轮廓的方向, 因此可以用地形轮廓的二阶谱矩来表征各向异性表面的等方性。

如果地形表面是等方性的 (理想情况), 则  $m_2(\theta)$  必定与  $\theta$  无关, 因此  $m_2(\theta) = m_2 = \text{常量}$ , 即  $m_{2\max} = m_{2\min} = m_2$ , 此时  $m_2(\theta)$  的轨迹为圆, 则可推出  $M_2^2 = 4\Delta_2$ , 因此我们可以用下式评定各向异性表面的等方性。

$$\Delta = 2 \frac{\sqrt{\Delta_2}}{M_2} = \frac{2 \sqrt{m_{20}^* m_{02} - m_{11}^2}}{m_{20} + m_{02}} \quad (6)$$

$\Delta$  是表征三维地形表面的等方性参数。

当  $m_{11} = 0$ ,  $m_{20} = m_{02}$ ,  $\Delta = 1$  表示地形表面是完全等方性的 (其实地形表面绝对各向同性不可能), 反之, 地形表面完全不等方性时,  $m_{11} = 0$ ,  $m_{20}$  或  $m_{02} = 0$ ,  $\Delta = 0$ ; 所以  $0 \leq \Delta \leq 1$ , 且  $\Delta$  越接近 1, 等方性就越好。

实际评价地形的各向异性时, 对于同一地形表面, 测量的网格数不仅仅代表三条轮廓线, 这时  $\Delta$  不为单一数值, 等方性参数可取其平均值  $\Delta_{\text{average}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i$ 。

需要指出的是  $M_2^2 = 4\Delta_2$  只是各向同性表面的必要条件, 因此式 (6) 也只能表示各向异性地形表面的各个方向的相异程度。不过, 在实际应用的地形表面, 真正各向同性地形表面几乎不存在, 因此用等方性参数完全可以定量地描述各向异性的地形表面。

## 4 结论

本文基于分形几何理论, 提出了一种真实三维地形中各向异性表面的等方性参数评定方法。以真实地形为例: 根据这块地形的高程数据, 对匹配窗口进行了 FFT 变换, 利用最小二乘拟合直线求得地形轮廓的分形维数, 由此计算出轮廓谱矩和表面谱矩, 进而评定各个地形区域的等方性; 接着按照某方向计算各个地形区域的特征度量值, 找出该条件下的适配区域, 称为某方向适配区域; 最后对于找出的等方性不同的某方向适配区域, 分别按照飞行器与正西成  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 180^\circ$  方向进入, 计算其匹配概率。图 3 (a)、(b) 分别表示了等方性系数较高和较低的情况下, 特定地形区域上的适配性度量值和方向之间的关系: 横坐标表示方向, 纵坐标表示飞行器从 180 个不同方向进入某方向适配区域的匹配概率。

因此, 根据等方性系数较低和较高的情况下特定地形区域上的适配性度量值和方向之间的关系, 在进行飞行任务规划的预处理时, 可以先计算某方向上适配区域的等方性系数, 如果该区域等方性较好, 则它的导航性能对方向不敏感, 各个方向上的匹配概率相差很小 (如图 3 (a) 所示), 不需要再经过复杂的分析就可以全面得出该区域的地形可导航性; 如果该区域等方性较差, 则它的导航性能对方向敏感, 地形在各个方向上的可导航性可能不一样, 并且各个方向上的匹配概率起伏很大 (如图 3 (b) 所示), 只有选择较小的方向粒度作为步调来计算分析该区域在各个方向上的匹配性能指标, 才能全面分析该区域的地形可导航性。按照上述策略可以大大提高飞行任务规划系统预处理的效率。

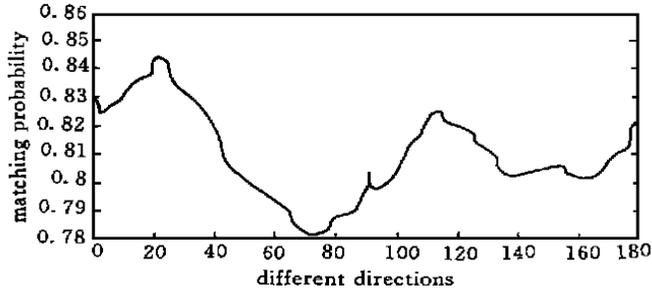


图3 (a) 等方性系数 0.9876: 适配性度量值与方向之间的关系

Fig. 3 (a) Isotropy coefficient with 0.9876: the relation between correlation suitability and direction

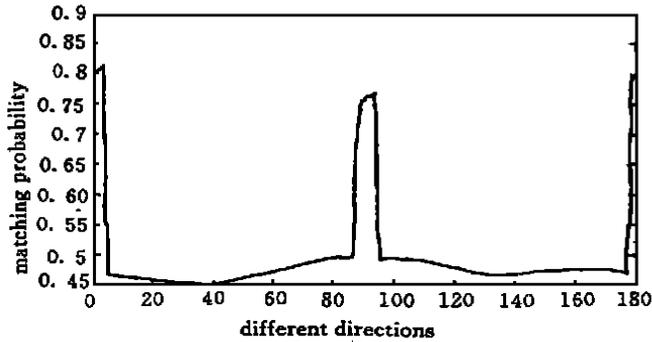


图3 (b) 等方性系数 0.1601: 适配性度量值与方向之间的关系

Fig. 3 (b) Isotropy coefficient with 0.1601: the relation between correlation suitability and directions

## 参考文献:

- [1] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. San Francisco, CA: Freeman, 1982.
- [2] Sayles R S, Thomas T R. Surface topography as a nonstationary random process [J]. Nature (271), 1978.
- [3] Berry M V, Hanny T R. Topography of random surface [J]. Nature (273), 1978.
- [4] 余龙华等. 基于FBM的分形地形模拟原理研究 [J]. 宇航学报, 1999, 3: 21-25.
- [5] [英] 肯尼思·法尔科内. 分形几何—数学基础及其应用 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1991.
- [6] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic plastic contact between rough surfaces [J]. ASME J. Tribol, 1991, 113 (1): 1-11.
- [7] Thomas T R. Rough surfaces [M]. New York: Longman Press, 1982.
- [8] 李成贵等. 三维表面粗糙度的等方性评定 [J]. 机械工程学报, 1999, 2: 14-19.