国 防 科 技 大 学 学 报
第22卷 第4期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 22 No. 4 2000

文章编号: 1001-2486(2000)04-0107-04

鲁棒H∞次优控制问题*

张 明, 谢红卫

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 证明了鲁棒H∞次优控制问题可以归结为两个代数黎卡提不等式的解。利用不等式形式上的特点, 还研究H∞/H2混合次优控制问题, 并给出了应用实例以说明本结果的有效性。

关键词: 鲁棒H∞次优化; 鲁棒H∞/H2混合次优化; 代数黎卡提不等式

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Robust H∞ Sub-optimization Control Problem

ZHANG Ming, XIE Hong-wei

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: It is proposed that robust H∞ sub-optimization control problem can be solved by solving two algebraic Riccati inequalities. We have also studied robust H∞/H2 mixed sub-optimization controller based on Algebraic Riccati Inequality. Moreover, an example of application is given to illustrate the main results.

Key words: robust H∞ sub-optimization; robust H∞/H2 mixed sub-optimization; Algebraic Riccati Inequality

考虑广义不确定对象 $G(s)$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_1\omega + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_{21}\omega \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}$$

和反馈控制器 $K(s)$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \boldsymbol{A}_c\xi + \boldsymbol{B}_c y \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}_c\xi \end{cases} \tag{2}$$

及其闭环传递函数

$$T_{z\omega}(s): \omega \rightarrow \boldsymbol{z} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, ξ 为 n 维状态向量, ω 为 r 维噪声向量, $\boldsymbol{u}$ 为 p 维控制信号向量, $\boldsymbol{z}$ 为 m 维被控制输出信号向量, $\boldsymbol{y}$ 为 q 维测量信号向量。允许摄动 $\Delta\boldsymbol{A} \in \Lambda$.

定义1 (鲁棒H∞次优设计问题) 对于(1)描述的广义不确定对象 $G(s)$ 和 $\gamma > 0$, 寻找控制器 $K(s)$ 使得: 对于允许摄动 $\Delta\boldsymbol{A} \in \Lambda$, 闭环系统(3)内部稳定; 且 $T_{z\omega}(s)$: $\omega \rightarrow \boldsymbol{z}$ 满足:

$$\| T_{z\omega}(s) \|_\infty < \gamma \tag{4}$$

相应地, 控制器 $K(s)$ 称为鲁棒H∞次优控制器。

对于广义确定对象的H∞次优控制问题, DGKF论文[1]把它归结为两个代数黎卡提方程的解。本文利用代数黎卡提不等式与H∞优化之间的关系证明了, 鲁棒H∞次优控制问题可以归结为两个代数黎卡提不等式的解。由于不等式形式上的特点, 我们还可以研究鲁棒H∞/H2混合次优控制问题。

定义2 (鲁棒H∞/H2混合次优设计问题) 对于(1)描述的广义不确定对象 $G(s)$ 和 $\gamma > 0$, $\beta > 0$,

* 收稿日期: 1999-12-18
作者简介: 张明(1970-), 男, 讲师, 硕士。

寻找反馈控制器 $K(s)$ 使得对于允许摄动 $\Delta A\in\Lambda$，闭环系统 (3) 内部稳定且 $T_{z\omega}(s)$: $\omega\to z$ 满足:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty<\gamma,\ \|T_{z\omega}(s)\|_2<\beta \tag{5}$$

相应地，控制器 $K(s)$ 称为鲁棒 H_∞/H_2 次优控制器。

1 主要结果

引理 1 给定 $\gamma>0$，$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$，那么下列条件等价:

(1) $\|G(s)\|_\infty<\gamma$;

(2) 存在 $P>0$ 使得下列代数黎卡提不等式成立:

$$PA+A^{\mathrm T}P+\gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P+C^{\mathrm T}C<0$$

证明 见[2，推论 12.3]

定理 1 设广义不确定对象 (1) 满足如下假设条件:

¹ $(A,\ B_1)$ 是可稳定的;

④ $(C_1,\ A)$ 是可检测的;

㈣ $D_{12}^{\mathrm T}[D_{12}\quad C_1]=[I\quad 0]$;

¼ $D_{21}[D_{21}^{\mathrm T}\quad B_1^{\mathrm T}]=[I\quad 0]$.

对于给定的 $\gamma>0$，如果存在正定矩阵 $X>0$ 和 $Y>0$ 满足如下代数黎卡提不等式:

$$P(X)=A^{\mathrm T}X+XA+X(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm T}-B_2B_2^{\mathrm T})X+C_1^{\mathrm T}C_1<0 \tag{6}$$

$$Q(Y)=YA^{\mathrm T}+AY+Y(\gamma^{-2}C_1^{\mathrm T}C_1-C_2^{\mathrm T}C_2)Y+B_1B_1^{\mathrm T}<0 \tag{7}$$

并且 $\lambda_{\max}(XY)<\gamma^2$ 成立，进一步，对于允许摄动 ΔA，有下式成立:

$$Q=\begin{pmatrix}\gamma^2Y^{-1}(Q(Y)+\Delta AY+Y\Delta A)Y^{-1} & -\gamma^2Y^{-1}Q(Y)Y^{-1}+P(X)-\gamma^{-2}\Delta AZ^{-1}\\ -\gamma^2Y^{-1}Q(Y)Y^{-1}+P(X)-\gamma^{-2}Z^{-1}\Delta A & \gamma^2Y^{-1}Q(Y)Y^{-1}-P(X)\end{pmatrix}<0 \tag{8}$$

那么鲁棒 H_∞ 次优反馈控制器由下式给定:

$$\begin{aligned}\xi&=(A+\gamma^{-2}B_1F_1-B_2F_2)\xi+G(y-C_2\xi)\\ u&=-F_2\xi\end{aligned} \tag{9}$$

其中:

$$F_1=B_1^{\mathrm T}X,\ F_2=B_2^{\mathrm T}X,\ G=ZC_2^{\mathrm T},\ Z=Y(I-\gamma^{-2}XY)^{-1}$$

证明 由 (1) 和 (9) 构成的闭环系统可描述如下:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot x\\ \xi\end{pmatrix}=\mathcal{A}\begin{pmatrix}X\\ \xi\end{pmatrix}+\mathcal{B}\omega\\ z=\mathcal{C}\begin{pmatrix}x\\ \xi\end{pmatrix}\end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases}\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A & -B_2F_2\\ GC_2 & A+\gamma^{-2}B_1F_1-B_2F_2-GC\end{pmatrix}\\ \mathcal{B}=\begin{bmatrix}B_1\\ GD_{21}\end{bmatrix}\\ \mathcal{C}=(C_1-D_{12}F_2)\end{cases} \tag{11}$$

显然对于任意允许摄动 $\Delta A\in\Lambda$，

$$T_{z\omega}(s)=\mathcal{C}(sI-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \tag{12}$$

由 $X>0$，$Y>0$ 和 $\lambda_{\max}(XY)<\gamma^2$，不难验证:

$$Z=Y(I-\gamma^{-2}XY)^{-1}>0$$

$$P=\begin{pmatrix}\gamma^2Y^{-1} & -\gamma^2Z^{-1}\\ -\gamma^2Z^{-1} & \gamma^2Z^{-1}\end{pmatrix}>0 \tag{13}$$

进一步依据条件(四) ¼，整理下式可得：

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\gamma^{-2}\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}<0 \tag{14}$$

于是依据引理 1 可得：

$$\|T_{z\omega}(s)\|_{\infty}=\|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\|_{\infty}<\gamma \tag{15}$$

注释：给出假设条件(四) ¼ 只是为了计算和推导的方便，此条件可放宽。有关论述可见参考文献[1]。

定理 2 设广义不确定对象 (1) 满足假设条件¹ ~ ¼；对于给定的 $\gamma>0$，$\beta>0$，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{X}>0$ 和 $\boldsymbol{Y}>0$ 满足 (6)、(7)，并且 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{XY})<\gamma^2$ 成立；进一步，对于任意允许摄动 $\Delta\boldsymbol{A}\in\Lambda$，(8) 式成立；且 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}})+\mathrm{trace}(\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z})<(\beta/\gamma)^2$，那么鲁棒H∞/H2 次优反馈控制器由 (9) 式给定。

证明 由定理 1 的证明可知：$\boldsymbol{A}$ 稳定，且闭环系统满足H∞次优性能指标，因此只需证明，闭环系统满足H2 次优性能指标。

由 (11) 可知，对于任意固定的允许摄动 $\Delta\boldsymbol{A}\in\Lambda$：

$$\|T_{z\omega}(s)\|_2^2=\|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\|_2^2=\mathrm{trace}(\boldsymbol{P}_{\Delta A}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}) \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{P}_{\Delta A}>0$ 满足：

$$\boldsymbol{P}_{\Delta A}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\Delta A}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=0 \tag{17}$$

比较 (14)、(17)，可得 $\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_{\Delta A}>0$ 满足

$$\Delta\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{P}+\gamma^{-2}\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=0 \tag{18}$$

于是

$$\|T_{z\omega}(s)\|_2^2\leqslant\mathrm{trace}(\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}})=\gamma^2\mathrm{trace}(\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1)+\gamma^2\mathrm{trace})(\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{Z}) \tag{19}$$

定理得证。

2 应用实例及说明

考虑如下广义不确定对象

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(-6+\Delta\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}+[0.3\quad 0.4]\omega+\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}-0.4\\0.3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+[-0.8\quad 0.6]\omega\end{cases} \tag{20}$$

其中，

$$\Delta\boldsymbol{a}\in\Lambda=\{e:-0.15<e<0.25\}$$

给定 $\gamma=0.1$，$\beta=0.11$，设计鲁棒H∞/H2 次优反馈控制器 (2) 满足性能指标 (5).

解 对比 (1) 与 (20) 可知：

$$\boldsymbol{A}=-6,\ \boldsymbol{B}_1=[0.3\quad 0.4],\ \boldsymbol{B}_2=1,\ \boldsymbol{C}_2=1,$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}-0.4\\0.3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_{12}=\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_{21}=[-0.8\quad 0.6] \tag{21}$$

不难验证条件¹ ~ ¼ 成立，$\boldsymbol{X}=0.1$，$\boldsymbol{Y}=0.09$ 满足 (6)，(7) 以及 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{XY})<\gamma^2$；并且对于任意的 $\Delta\boldsymbol{a}\in\Lambda=\{e:-0.15<e<0.25\}$，(8) 成立.

进一步，

$$\mathrm{trace}(\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}})+\mathrm{trace}(\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z})=0.278+0.9<(\beta/\gamma)^2=1.21 \tag{22}$$

于是依据定理 2 可设计鲁棒 H∞/H2 次优反馈控制器

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}=-4.5\xi+0.9\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{u}=-0.1\xi\end{cases} \tag{23}$$

此时，闭环系统可由 (10) 式描述，并且满足鲁棒H∞/H2 次优性能指标：

$$\|T_{z\omega}(s)\|_{\infty}<0.1,\quad \|T_{z\omega}(s)\|_2<0.11$$

其中 (10) 式的参数满足：

$$A=\begin{pmatrix}-6+\Delta\boldsymbol{a} & -0.1\\ -0.9 & -4.5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ -0.72 & 0.54\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-0.4 & -0.06\\ 0.3 & -0.08\end{pmatrix},\ \Delta\boldsymbol{a}\in\Lambda \tag{24}$$

从以上应用实例来看，本文的主要结果是非平凡的，是有意义的，说明了代数 Riccati 不等式形式上的特点，有助于多目标优化及处理参数不确定系统。尽管代数 Riccati 不等式的极限形式即为代数 Riccati 方程，但是在很多情况下，代数 Riccati 不等式表现出更大的灵活性。

3 结论

H_∞优化问题与代数 Riccati 不等式的联系，在近年来获得了学者的注意与研究[3]。尽管代数 Riccati 不等式的极限形式即为代数 Riccati 方程，但是我们绝不可以把二者划等号。不等式形式上的特点有助于多目标优化及处理参数不确定系统，并获得鲁棒 H_∞次优控制器和鲁棒 H_∞/H_2 混合次优控制器。

参考文献:

[1] Doyle J, Glover K, Khargonekar P, Francis B A. State－space solution to standard H_∞ and H_2 control problem [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1989, 34 (8): 831-847.

[2] Zhou kemin, Doyle J. Essential of Robust control [M]. Prentice Hall, Inc 1998: 238-239.

[3] 张明, 施鼎汉. 代数 Riccati 不等式与滤波器 [J]. 厦门大学学报 (自然科学版), 1997, 36 (6): 825-828.