

文章编号: 1001-2486 (2000) 05-0001-06

## 脱层壳屈曲的一阶剪切理论\*

李道奎, 周建平, 雷勇军

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 脱层的存在将会大大降低层合结构的屈曲载荷。本文将含任意位置环向贯穿脱层的轴压圆柱壳分成多段子壳, 用厚度的一次多项式模拟脱层壳屈曲时子壳的轴向和环向位移, 利用变分原理导出了脱层壳的屈曲方程和定解条件, 并用状态空间方法进行求解。通过与经典理论比较, 指出了它们各自的适用范围; 考虑脱层壳的三种不同屈曲模态, 分析了边界条件、脱层长度、深度对脱层壳屈曲载荷的影响; 最后给出了正交各向异性脱层壳的屈曲分析。

**关键词:** 脱层; 脱层壳; 子壳; 屈曲; 屈曲载荷; 状态空间

**中图分类号:** O342      **文献标识码:** A

## Buckling Analysis of Delaminated Shell for the First Order Shear Deformation Theory

LI Dao-kui, ZHOU Jian-ping, LEI Yong-jun

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Delaminations may greatly reduce the buckling load of the laminated structure. Cylinder including arbitrary delaminations in longitudinal and thickness and spanning the entire circumference was divided into multiple sublaminated shell whose longitudinal displacements were simulated with linear function of the thickness coordinate. The variational principle was applied to obtain the governing equations and boundary conditions. The state-space scheme was used to solve the problem. By comparing with classical theory, the usable range of each theory was pointed out. Three difference buckling modes of delaminated shell were considered. The influence of boundary condition, length and depth of delamination on buckling load was analyzed. Finally, the buckling analysis of delaminated orthotropic shell was given.

**Key words:** delamination; delaminated shell; sublaminated shell; buckling; buckling load; state-space

复合材料层合圆柱壳是工程中一种常用的结构, 但在其制造和使用过程中, 常常会出现层间脱层。脱层的局部屈曲会大大降低结构的轴向承载能力, 因此, 研究脱层对层合圆柱壳轴向承载能力的影响具有重要的工程意义。Troshin<sup>[1]</sup>研究了纵向贯穿脱层对轴压层合圆柱壳的影响。Sallam 和 Simit-ses<sup>[2]</sup>、Kardomateas 和 Chung<sup>[3]</sup>采用 Donnell 壳理论研究了含环向或纵向贯穿表面脱层的各向同性圆柱壳的屈曲或后屈曲问题。

以上研究都是建立在 Kirchhoff 假设的经典层合理论基础上的, 而纤维复合材料层合结构的层间剪切效应非常明显, Chattopadhyay 和 Gu<sup>[4,5]</sup>在脱层界面通过位移的跳跃不连续条件模拟复合材料圆柱壳的层间脱层, 在环向和周向对位移函数进行三角级数展开, 研究了含环向贯穿脱层圆柱壳的屈曲和后屈曲问题。本文考虑剪切变形, 建立了含环向贯穿脱层正交各向异性复合材料层合圆柱壳的屈曲分析模型, 研究了边界条件、脱层长度和深度等因素对脱层壳屈曲载荷的影响, 得出了三种屈曲模态的形状和发生区域。与 Chattopadhyay 和 Gu 的分析模型相比, 本文模型在环向也是用三角级数展开, 而在轴向进行精确求解, 其结果将会更加精确。分析中还可以看出, 该模型易于分析各种边界条件的影响, 可以很好地发现接触现象, 为下一步研究接触问题和后屈曲问题提供了很好的基础。

\* 收稿日期: 1999-12-30

基金项目: 杰出青年科学基金资助项目 (19925209) 和国家自然科学基金资助项目 (19572027)

作者简介: 李道奎 (1971-), 男, 博士生。

# 1 含环向贯穿脱层圆柱壳屈曲分析模型

## 1.1 控制方程

为建立脱层壳的剪切理论模型, 首先考虑含环向贯穿脱层的圆柱壳, 其示意图如图 1 所示。脱层将壳分为四部分: 不含脱层的子壳 1 和 4 以及由脱层分开的子壳 2 和 3。原始壳的长度和厚度分别为  $L$  和  $H$ , 子壳 1 和脱层的长度分别为  $l$  和  $a$ , 子壳 3 的厚度为  $h$ 。根据壳体的一阶理论, 子壳  $i$  的位移模式可设为:

$$u_i = (u_i + z_i \varphi_{xi}) \cos \frac{ny_i}{R_i} \quad (1a)$$

$$v_i = (v_i + z_i \varphi_{yi}) \sin \frac{ny_i}{R_i} \quad (1b)$$

$$w_i = w \cos \frac{ny_i}{R_i} \quad (1c)$$

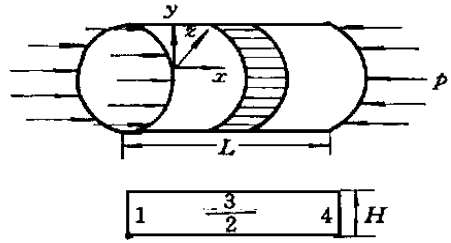


图 1 脱层圆柱壳几何示意图

Fig. 1 Geometry of delaminated cylinder shell

其中,  $i = 1, 2, 3, 4$  和  $x_i \in [0, l_i]$ ,  $z_i \in [-h_i/2, h_i/2]$  分别为子壳  $i$  的局部轴向和横向坐标。 $R_i$ 、 $l_i$  和  $h_i$  为子壳  $i$  的曲率半径、长度和厚度,  $n$  为环向半波数。 $z_i$  与总体坐标系  $z$  坐标的关系为:  $z_i = z - d_i$ , 其中,  $d_i = H/2 - h_i/2$ 。 $u_i$ ,  $v_i$ ,  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{yi}$  分别为子壳中面上  $x$  和  $y$  方向的位移和转角。

采用薄壳假设, 子壳  $i$  的几何方程:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} = \varepsilon_1^{(i)} \cos \frac{ny_i}{R_i} = (u_{i,x} + z_i \varphi_{xi,x}) \cos \frac{ny_i}{R_i} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_2^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{w_i}{R_i} = \varepsilon_2^{(i)} \cos \frac{ny_i}{R_i} = \left[ \frac{n}{R_i} (v_i + z_i \varphi_{yi}) + \frac{w_i}{R_i} \right] \cos \frac{ny_i}{R_i} \quad (2b)$$

$$\varepsilon_4^{(i)} = \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{v_i}{R_i} = \varepsilon_4^{(i)} \cos \frac{ny_i}{R_i} = \left[ -\frac{mw_i}{R_i} + \varphi_{yi} - \frac{1}{R_i} (v_i + z_i \varphi_{yi}) \right] \sin \frac{ny_i}{R_i} \quad (2c)$$

$$\varepsilon_5^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = \varepsilon_5^{(i)} \cos \frac{ny_i}{R_i} = (w_{i,x} + \varphi_{xi}) \cos \frac{ny_i}{R_i} \quad (2d)$$

$$\varepsilon_6^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = \varepsilon_6^{(i)} \sin \frac{ny_i}{R_i} = \left[ -\frac{n}{R_i} (u_i + z_i \varphi_{xi}) + (v_{i,x} + z_i \varphi_{yi,x}) \right] \sin \frac{ny_i}{R_i} \quad (2e)$$

对正交各向异性材料, 本构关系为:

$$\sigma_j^{(i)} = Q_{jk} \varepsilon_k^{(i)} \quad (3)$$

设脱层壳轴向受正压力  $p$ , 子壳  $i$  的厚度为  $h_i$ , 那么  $p_i = h_i p$ , 子壳的能量变分为:

$$\delta \Pi_i = \int_{x_i} \int_{y_i} \int_{z_i} \sigma_j^{(i)} \delta \varepsilon_j^{(i)} dz_i dy_i dx_i - \int_{x_i} \int_{y_i} p_i h_i w_{i,x} \delta w_{i,x} dy_i dx_i = \pi R_i \int_{x_i} F_i dx_i \quad (4)$$

其中

$$F_i = N_{10}^{(i)} \delta u_{i,x} + N_{11}^{(i)} \delta \varphi_{xi,x} + \frac{1}{R_i} N_{20}^{(i)} (n \delta w_i + \delta v_i) + \frac{n}{R_i} N_{21}^{(i)} \delta \varphi_{yi} + N_{40}^{(i)} \left( \delta \varphi_{yi} - \frac{n}{R_i} \delta v_i - \frac{1}{R_i} \delta w_i \right) - \frac{1}{R_i} N_{41}^{(i)} \delta \varphi_{yi} + N_{50}^{(i)} (\delta w_{i,x} + \delta \varphi_{xi}) + N_{60}^{(i)} (\delta v_{i,x} - \frac{n}{R_i} \delta u_i) + N_{61}^{(i)} (\delta \varphi_{yi,x} - \frac{n}{R_i} \delta \varphi_{xi}) - p_i h_i w_{i,x} \delta w_{i,x}$$

内力素分别为:

$$N_{1k}^{(i)} = A_{1k}^{(i)} u_{i,x} + A_{1(k+1)}^{(i)} \varphi_{xi,x} + \frac{n}{R_i} (A_{2k}^{(i)} v_i + A_{2(k+1)}^{(i)} \varphi_{yi}) + \frac{A_{2k}^{(i)} w_i}{R_i},$$

$$N_{2k}^{(i)} = A_{2k}^{(i)} u_{i,x} + A_{2(k+1)}^{(i)} \varphi_{xi,x} + \frac{n}{R_i} (A_{3k}^{(i)} v_i + A_{3(k+1)}^{(i)} \varphi_{yi}) + \frac{A_{3k}^{(i)} w_i}{R_i}$$

$$N_{4k}^{(i)} = A_{4k}^{(i)} \left[ -\frac{n}{R_i} w_i + \varphi_{yi} - \frac{1}{R_i} v_i \right] - \frac{1}{R_i} A_{4(k+1)}^{(i)} \varphi_{yi}, \quad N_{5k}^{(i)} = A_{5k}^{(i)} (w_{i,x} + \varphi_{xi})$$

$$N_{6k}^{(i)} = \frac{A_{8k}^{(i)} w_i}{R_i} + A_{6k}^{(i)} \left[ v_{i,x} - \frac{n}{R_i} u_i \right] + A_{6(k+1)}^{(i)} \left[ \varphi_{yi,x} - \frac{n}{R_i} \varphi_{xi} \right]$$

其中,  $[A_{1l}^{(i)} A_{2l}^{(i)} A_{3l}^{(i)} A_{4l}^{(i)} A_{5l}^{(i)} A_{6l}^{(i)}] = \int_{z_l} [Q_{11}^{(i)} Q_{12}^{(i)} Q_{22}^{(i)} Q_{44}^{(i)} Q_{55}^{(i)} Q_{66}^{(i)}] z_l^l dz_l, (l=0, 1, 2)$ 。

由变分原理可以推导出第  $i$  段子壳的平衡方程为:

$$N_{10,x}^{(i)} + \frac{n}{R_i} N_{60}^{(i)} = 0 \quad N_{11,x}^{(i)} + \frac{n}{R_i} N_{61}^{(i)} - N_{50}^{(i)} = 0 \quad \frac{n}{R_i} N_{20}^{(i)} - N_{60,x}^{(i)} - \frac{1}{R_i} N_{40}^{(i)} = 0 \quad (5. a, b, c)$$

$$\frac{n}{R_i} N_{21}^{(i)} - N_{61,x}^{(i)} - \frac{1}{R_i} N_{41}^{(i)} + N_{40}^{(i)} = 0 \quad \frac{1}{R_i} N_{20}^{(i)} - \frac{n}{R_i} N_{40}^{(i)} - N_{50,x}^{(i)} + p_i h w_{i,xx} = 0 \quad (5. d, e)$$

将各内力素表达式代入 (5), 就可以得到用位移分量表示控制方程。

## 1.2 定解条件

为了求得微分方程组 (5) 的解, 共需 40 个定解条件。由变分方程可以导出这些定解条件。

(I) 端点边界条件有多种组合, 例如:

简支端点边界条件:

$$SS1: w = N_{10} = N_{11} = N_{60} = \varphi_y = 0 \quad SS2: w = u = N_{11} = N_{60} = \varphi_y = 0$$

$$SS3: w = N_{10} = N_{11} = v = \varphi_y = 0 \quad SS4: w = u = N_{11} = v = \varphi_y = 0$$

固支端点边界条件:

$$CC1: w = N_{10} = \varphi_x = N_{60} = \varphi_y = 0 \quad CC2: w = u = \varphi_x = N_{60} = \varphi_y = 0$$

$$CC3: w = N_{10} = \varphi_x = v = \varphi_y = 0 \quad CC4: w = u = \varphi_x = v = \varphi_y = 0$$

自由端点边界条件: FF:  $N_{10} = N_{11} = N_{60} = N_{61} = N_{50} - p_i h w_{i,x} = 0$

(II) 子壳间的位移连续条件  $1(i=2, 3)$ :

$$u_i(0) = u_1(l_1) + d_i \varphi_{x1}(l_1) \quad \varphi_{xi}(0) = \varphi_{x1}(l_1) \quad v_i(0) = v_1(l_1) + d_i \varphi_{y1}(l_1)$$

$$\varphi_{yi}(0) = \varphi_{y1}(l_1) \quad w_i(0) = w_1(l_1)$$

$$u_i(l_i) = u_4(0) + d_i \varphi_{x4}(0) \quad \varphi_{xi}(l_i) = \varphi_{x4}(0) \quad v_i(l_i) = v_1(0) + d_i \varphi_{y4}(0) \quad \varphi_{yi}(l_i) = \varphi_{y4}(0)$$

$$w_i(l_i) = w_4(0)$$

(III) 子壳间的平衡连接条件:

$$R_j N_{10}^{(j)}(l_{14}) = \sum_{i=2,3} R_i N_{10}^{(i)}(l_{23}) \quad R_j N_{11}^{(j)}(l_{14}) = \sum_{i=2,3} R_i [N_{11}^{(i)}(l_{23}) + d_i N_{10}^{(i)}(l_{23})]$$

$$R_j N_{60}^{(j)}(l_{14}) = \sum_{i=2,3} R_i N_{60}^{(i)}(l_{23}) \quad R_j N_{61}^{(j)}(l_{14}) = \sum_{i=2,3} R_i [N_{61}^{(i)}(l_{23}) + d_i N_{60}^{(i)}(l_{23})]$$

$$R_j (N_{50}^{(j)}(l_{14}) - p_i h w_{i,x}(l_{14})) = \sum_{i=2,3} R_i (N_{50}^{(i)}(l_{23}) - p_i h w_{i,x}(l_{23}))$$

当  $x = l_1$  时,  $j = 1, l_{23} = 0, l_{14} = l_1$ ; 当  $x = L$  时,  $j = 4, l_{23} = l_2 = l_3, l_{14} = 0$ 。

## 1.3 状态空间公式及其求解

下面采用状态空间方法求解 (5) 式和定解条件组成的定解问题。取第  $i$  段子壳的状态空间变量为:

$$n_i = \{u_i \quad \varphi_{xi} \quad v_i \quad \varphi_{yi} \quad w_i \quad u_{i,x} \quad \varphi_{xi,x} \quad v_{i,x} \quad \varphi_{yi,x} \quad w_{i,x}\}^T \quad (6)$$

式中  $T$  代表转置, 则控制方程可写为如下形式

$$\dot{\Pi}_{i,x} = S_i \Pi_i \quad (7)$$

这里,  $S_i$  为状态空间矩阵, 其具体形式略。

状态空间方程 (7) 的解为

$$\Pi_i = e^{S_i x} \Pi_i^0 = K_i(x) \Pi_i^0 \quad (8)$$

这里,  $\eta_i^0 = (C_1^i C_2^i \dots C_{10}^i)^T$  为积分常向量。

取系统常向量为:  $\eta^0 = \left\{ (\eta_1^0)^T (\eta_2^0)^T (\eta_3^0)^T (\eta_4^0)^T \right\}^T$ , 则定解条件可写成如下线性代数方程组  $M\eta^0 = 0$  (9)

要使方程组 (9) 有非零解, 系数矩阵行列式的值必须为零。即:  $|M| = 0$ , 由此可得到临界载荷  $P_{cr}$ , 将所得的临界载荷代入 (9) 和 (8), 可求得对应于  $P_{cr}$  的屈曲模式。

### 2 算例分析

首先, 为验证本文所使用的模型和分析方法的正确性, 对两端固支的对称脱层壳, 图 2 给出了两种理论解的比较。壳体几何参数为:  $L/R = 5, R/H = 30, h = 0.3H$ 。材料常数为:  $E = 200Gpa, \mu = 0.3$ 。图中横坐标  $\alpha$  为脱层长度  $a$  与壳跨度  $L$  的比, 纵坐标  $P_{cr}$  为脱层壳屈曲载荷  $P_{cr}$  与两端固支的完整壳经典屈曲载荷的比 (以下  $P_{cr}$  的定义同此)。从图中可以看出, 当  $\alpha$  较大时 ( $> 0.12$ ), 两种理论的差别较小 (相差 0.64%), 这是由于此时脱层壳主要发生局部屈曲, 屈曲载荷主要由径厚比最大 ( $R/h = 100$ ) 的子壳 3 来控制, 剪切效应影响较小; 当  $\alpha$  较小时 ( $< 0.03$ ), 脱层壳发生整体屈曲, 剪切效应影响较大, 两种理论的计算结果差别也较大 (相差 2.25%)。但无论  $\alpha$  如何变化, 两种理论的屈曲载荷  $P_{cr}$  随  $\alpha$  的变化趋势基本相似。而且, 当脱层长度分别趋近于 0 和  $L$  时, 脱层壳的屈曲载荷分别趋近于完整壳和完全分成两部分壳的屈曲载荷, 这说明了本文解的正确性。同时, 从图中也可以得到这样的结论: 对于较短的脱层, 使用剪切理论计算脱层壳的屈曲载荷比较合适; 而对于较长的脱层, 使用两种理论都可以得到较好的结果。

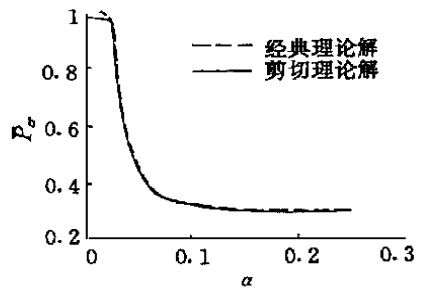


图 2 两种理论解的比较  
Fig 2 Comparison of solution with two theory

为了较好地分析脱层壳屈曲时的各种特性, 首先需要研究脱层壳的各种屈曲模式。对于  $L/R = 5/3, R/H = 30, h = 0.3H$  的各向同性对称脱层固支壳, 图 3.1 将三种屈曲模式的分布区域进行了划分, 图 3.2~ 3.4 分别给出了对应的屈曲模式图。图中“+”代表子壳 3 的横向模态位移, 实线代表

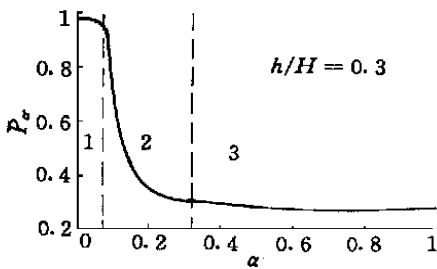


图 3.1 脱层壳屈曲模式区域图  
Fig. 3.1 Various model region of delaminated shell

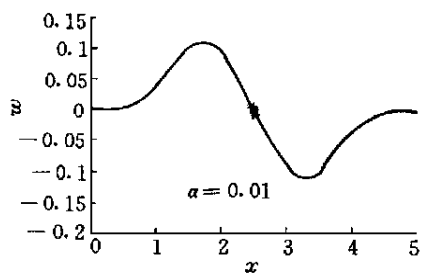


图 3.2 整体屈曲模式形状  
Fig 3.2 Shape of global buckling mode

子壳 1、2、4 的横向模态位移。从图中可以看出, 随着  $\alpha$  的增大, 脱层壳由整体屈曲 (区域 1) 到混合屈曲 (整体屈曲与局部屈曲相耦合, 区域 2) 再过渡到局部屈曲 (区域 3); 从图 3.1 中可以看到, 在整体脱层区域屈曲载荷基本上不变, 但在出现局部屈曲的混合屈曲区域下降得较快, 最后过渡到局

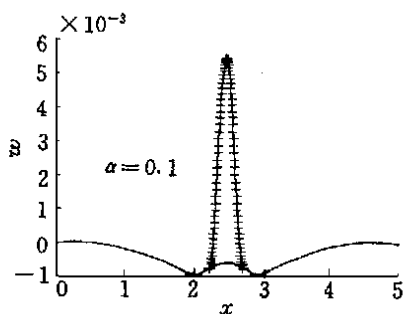


图 3.3 混合屈曲模态形状

Fig. 3.3 Shape of mixed buckling mode

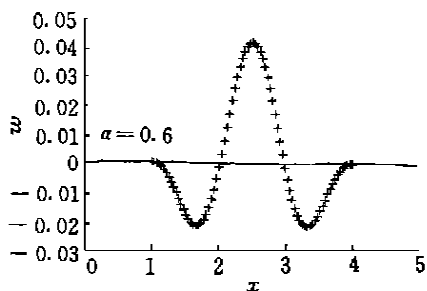


图 3.4 局部屈曲模态形状

Fig. 3.4 Shape of local buckling mode

部屈曲区域; 而且, 在由整体屈曲到混合屈曲的转变点 ( $\alpha \approx 0.09$ ), 存在明显的拐点, 这说明局部屈曲的出现对屈曲载荷的影响很大。从图 3.4 中还可以明显地看出由于两子壳的屈曲模态发生贯穿, 这说明实际屈曲过程中有接触现象出现, 但本文不予考虑。计算中还发现, 在屈曲模态发生变化时, 环向屈曲半波数也发生较大变化。

对于  $L/H = 50$ 、 $R/H = 30$ 、 $\beta = h/H$  分别为 0.1、0.2、0.3、0.4 的对称脱层壳, 图 4 给出了屈曲载荷随脱层长度比率  $\alpha$  的变化曲线。当  $\alpha$  较小时, 脱层壳的屈曲载荷几乎不随脱层深度的变化而变化, 原因是脱层壳发生整体屈曲, 脱层的横向位置对脱层壳的整体刚度基本上没有影响; 当  $\alpha$  较大时, 脱层壳发生局部屈曲,  $\beta = 0.4$  的脱层壳局部刚度下降得最少, 故  $\beta = 0.4$  的脱层壳的屈曲载荷最大。同时, 从图中可以看到一个区别于脱层梁的现象, 即对于一些较特殊的  $\alpha$  (整体屈曲向混合屈曲的转化) 值, 脱层壳的屈曲载荷随着脱层深度的增大而减小, 如当  $\alpha = 0.11$  时,  $\beta = 0.4$  的脱层壳的屈曲载荷比  $\beta = 0.3$  的脱层壳的屈曲载荷小, 这是因为在整体屈曲向混合屈曲的转化过程中, 环向屈曲半波数  $n$  将发生两次跳跃, 如  $\beta = 0.4$  的脱层壳, 在此过程中,  $n$  从  $4 \rightarrow 0 \rightarrow 4$ , 但是  $\beta$  不同的脱层壳对应于发生轴对称整体屈曲 ( $n = 0$ ) 的  $\alpha$  的范围不同, 如  $\beta = 0.4$  的脱层壳为  $0.8 \sim 0.11$ , 而  $\beta = 0.3$  的脱层壳为  $0.82 \sim 0.9$ , 而在发生轴对称整体屈曲时, 脱层壳的屈曲载荷下降很快。另外, 从图中还可以看到, 随着  $\beta$  的增大, 脱层壳发生整体屈曲的范围逐渐增大, 而发生局部屈曲的范围逐渐减小。

在 20 世纪 60 年代, 人们在研究面内边界条件对轴压筒支壳屈曲载荷的影响过程中发现: 如果允许边界在切线方向自由运动, 则屈曲载荷急剧降低。本文对一端固支, 另一端采用各种边界条件的对称脱层壳进行分析, 计算了各种边界条件下脱层壳的屈曲载荷 (如图 5)。几何参数为:  $L/H = 50$ ,  $R/H = 30$ ,  $\beta = 0.3$ 。从图中可以看出, 当  $\alpha$  较小时, 脱层壳发生整体屈曲, 筒支边界条件对脱层壳屈曲载荷的影响与完整壳的结论基本类似; 固支边界条件的变化对脱层壳的屈曲载荷影响不大; 由于对所有的位移变量都有限制, 自由边界条件对脱层壳的屈曲载荷影响最大, 整体屈曲对应的  $\alpha$  范围也最大。无论对何种边界条件, 当脱层长度大到一定值 ( $\alpha > 0.18$ ) 时, 屈曲载荷将与其他边界条件的屈曲载荷相差很小, 这是因为此时局部屈曲模态基本上成为脱层壳屈曲的主要控制模态, 边界条件对脱层壳的影响几乎可以不计。

复合材料结构由于横向剪切模量较低而受剪切效应的影响较大, 对于脱层壳的屈曲问题, 也是如此。本文以正交各向异性层合脱层壳为例, 计算了复合材料脱层壳的屈曲载荷随脱层长度的变化 (图 6), 脱层壳的几何参数与图 3.1 中的相同, 所用复合材料为 Kevlar-epoxy, 其材料常数为:  $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 9.65 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4.14 \text{ GPa}$ ,  $G_{23} = 3.45 \text{ GPa}$ ,  $\mu_{12} = 0.3$ , 铺层顺序为  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10}$ , 其中  $0^\circ$  表示材料主方向与圆柱壳的纵轴同向。将图 6 与图 3.1 进行比较中可知, 剪切效应对复合材料脱层壳屈曲载荷的影响比对各向同性脱层壳的影响大得多, 但是曲线的基本形状类似, 这说明, 由各

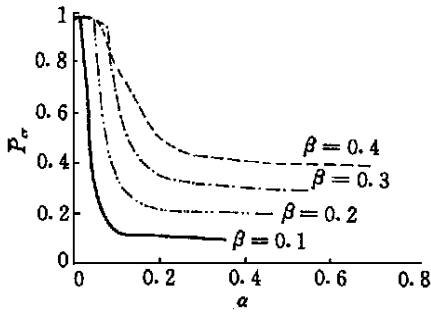


图 4 脱层深度对屈曲载荷的影响

Fig 4 Effect of depth of delamination on buckling

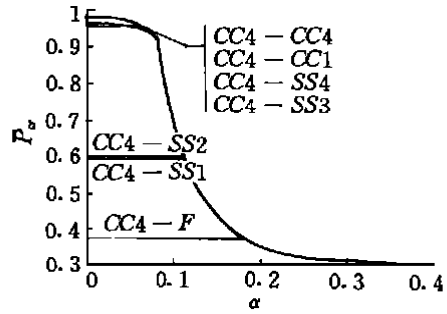


图 5 边界条件对屈曲载荷的影响

Fig 5 Effect of boundary condition on buckling load

向同性脱层壳屈曲分析得出的一些基本结论可以用于正交各向异性复合材料脱层壳。

### 3 结论

本文用一阶剪切理论对含环向贯穿脱层的圆柱壳进行了屈曲分析，从计算结果讨论中得到了以下结论：脱层壳的屈曲模态有整体屈曲、混合屈曲和局部屈曲三种，局部屈曲的出现对脱层壳的屈曲载荷影响很大；对于径厚比  $R/H$  和脱层长度比率  $\alpha$  较小的脱层壳，适合于用剪切理论来计算，而当  $L/H$  和  $\alpha$  较大的脱层壳，用经典理论来计算就已经足够精确了；脱层壳的屈曲载荷与  $\alpha$  成递减关系，与  $R/H$  成递增关系，但最后都趋于一定值；脱层壳的屈曲载荷并不完全随着脱层深度增大而增大，在某些时候脱层越深，屈曲载荷越小；脱层壳的屈曲载荷随着脱层向壳纵向中心靠近而降低；边界条件对整体屈曲影响较大，而对局部屈曲几乎没有影响；脱层对各向异性壳屈曲载荷的影响比对各向同性壳的影响大。

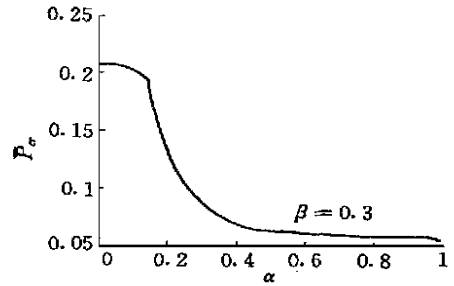


图 6 正交各向异性脱层壳的屈曲载荷

Fig 6 Buckling load of orthotropic delaminated shell

### 参考文献:

- [1] Troshin V P. Effect of longitudinal delamination in a laminar cylindrical shell on the critical external pressure [ J ]. J of Composite Materials, 1983, 17 ( 5 ): 563~ 567.
- [2] Sallam S, Simitses G J. Delamination buckling of laminated cylindrical shells under axial compression [ J ]. Composite Structures, 1987, 7 ( 2 ): 83~ 101.
- [3] Kardomatas G A, Chung C B. Thin film modeling of delamination buckling in pressure loaded laminated cylindrical shell [ J ]. AIAA J, 1992, 30 ( 8 ): 2119~ 2123.
- [4] Chattopadhyay A, Gu H. Modeling of delamination buckling in composite cylindrical shells with a new higher-order theory [ J ]. Composites Science and Technology, 1995, 54 ( 2 ): 223~ 232.
- [5] Gu H, Chattopadhyay A. Delamination buckling and postbuckling of composite cylindrical shells [ J ]. AIAA J, 1996, 34 ( 6 ): 1279~ 1286.