

文章编号: 100 12486 (2000) 0520007205

梁纯弯曲的大变形分析<sup>X</sup>

张晓今, 黄炎

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 在平面应力问题中, 分析了在梁端截面作用沿高度线性分布外力时纯弯梁大变形的几何非线性问题。给出了纯弯曲应力的精确解, 并用欧拉法得到了位移的近似解。当泊桑比为零时, 求得位移的精确解。

关键词: 梁; 大变形; 应力; 位移

中图分类号: O343 文献标识码: A

## The Analysis of Large Deformation of Pure Bending in Beams

ZHANG Xiaojin, HUANG Yan

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In the plane stress problem, the exact solution of stress in pure bending of beam acted by linear distributed external forces is obtained. The approximate solution of displacement is obtained by Euler method. When Poisson's ratio is zero, the exact solution of displacement is obtained.

Key words: beam; large deformation; stress; displacement

在弹性力学平面应力问题中, 矩形截面梁纯弯曲应力中的  $\nu = 0$ <sup>[1]</sup>。但是, 当梁发生大变形时, 考虑沿垂直  $y$  方向纵向截面切下的分离体的平衡, 则  $\nu$  不会为零。对此问题的分析, 须采用非线性理论方法。用变形前确定物体各点位置坐标的拉格朗日法<sup>[2]</sup>是很难求解这一问题的。欧拉用变形后确定各点位置坐标法求得了压杆超临界大变形的精确解<sup>[3]</sup>。

本文采用欧拉法求解纯弯梁大变形的几何非线性问题。

## 1 平面应力问题的非线性弹性力学分析

## 1.1 应变分析

平面梁在两端沿高度线性分布外力所形成的纯力偶作用下将弯曲成一圆弧扇形。力的平衡应取在变形后的位置上, 故变形后应取为极坐标。微分单元体应为矩形, 并符合剪应力为零的要求, 以此为基础来建立应变与位移的关系。

如图 1 所示, 设在直角坐标系中, 物体变形前任一点  $P_0$  的位置矢量为  $R_0$ , 变形后该点移至  $P$ , 位移矢量为  $u$ , 位置矢量为  $R$ , 则有

$$R = R_0 + u = (x_0 + u_x)i + (y_0 + u_y)j \quad (1)$$

式中  $i, j$  分别为沿  $x, y$  方向的单位矢量。采用欧拉法<sup>[4]</sup>, 将变形后物体任一点的位置用正交曲线坐标表示为:  $R = x(A_1, A_2)i + y(A_1, A_2)j$ , 求微分可得

$$dR = e_1 A_1 dA_1 + e_2 A_2 dA_2$$

式中

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial A_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_1}\right)^2}, \quad A_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial A_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_2}\right)^2} \quad (3)$$

$$e_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial A_1}i + \frac{\partial y}{\partial A_1}j\right) / A_1, \quad e_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial A_2}i + \frac{\partial y}{\partial A_2}j\right) / A_2 \quad (4)$$

X 收稿日期: 20000228

基金项目: 国家部委基金资助项目

作者简介: 张晓今 (1958), 男, 副教授。

$e_1$ 、 $e_2$  分别为沿  $A_1$ 、 $A_2$  方向的单位矢量。设位移矢量  $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ ，则变形前点的位置矢量可表为： $R_0 = R - (u_1 e_1 + u_2 e_2)$ ，求微分可得

$$dR_0 = e_1^0 A_1^0 dA_1 + e_2^0 A_2^0 dA_2 \quad (5)$$

$$A_1^0 = A_1 \sqrt{(1 - e_{11})^2 + e_{12}^2}, \quad A_2^0 = A_2 \sqrt{(1 - e_{22})^2 + e_{21}^2} \quad (6)$$

$$e_1^0 = [(1 - e_{11}) e_1 - e_{12} e_2] A_1 / A_1^0, \quad e_2^0 = [(1 - e_{22}) e_2 - e_{21} e_1] A_2 / A_2^0 \quad (7)$$

$$e_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{5u_1}{5A_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{5A_1}{5A_2} u_2, \quad e_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{5u_2}{5A_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{5A_2}{5A_1} u_1$$

$$e_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{5u_2}{5A_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{5A_1}{5A_2} u_1, \quad e_{21} = \frac{1}{A_2} \frac{5u_1}{5A_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{5A_2}{5A_1} u_2 \quad (8)$$

$e_1^0$ 、 $e_2^0$  分别为沿  $A_1$ 、 $A_2$  方向的单位矢量。变形前微段  $dR_0$  在  $e_1^0$ 、 $e_2^0$  方向的投影分别为  $A_1^0 dA_1$  和  $A_2^0 dA_2$ 。由此得单位伸长  $E_1$  和  $E_2$  为

$$E_1 = \frac{A_1 dA_1 - A_1^0 dA_1}{A_1^0 dA_1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - e_{11})^2 + e_{12}^2}}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - e_{22})^2 + e_{21}^2}} - 1 \quad (9)$$

## 112 平衡方程和虎克定律

变形后的微分单元体的微分面之间正交，四个微分面上无剪应力，由平衡方程得

$$\frac{5(R_1 A_2)}{5A_1} - \frac{5A_2}{5A_1} R_2 = 0, \quad \frac{5(R_2 A_1)}{5A_2} - \frac{5A_1}{5A_2} R_1 = 0 \quad (10)$$

非线性弹性理论的本构方程是建立在应力与格林应变的关系上的<sup>[4]</sup>。本文则改用虎克定律为

$$E = \frac{1}{E} (R - LR_2), \quad E_2 = \frac{1}{E} (R_2 - LR_1) \quad (11)$$

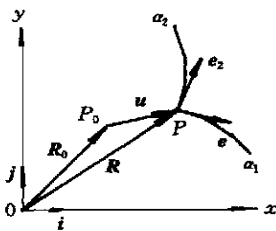


图 1  
Fig11

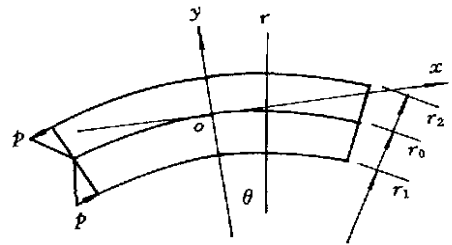


图 2  
Fig2

## 2 应力与位移的计算

### 211 应力计算

如图 2 所示，中性层圆弧半径为  $r_0$ ，两端边界的径线角为  $H = ? H_0$ ，分布外力的强度在上下边界处为  $p$ 。变形后点的坐标可表为： $x = r \sin H$ ， $y = r \cos H - r_0$ 。

令  $A_1 = H$ ， $A_2 = r$ ，代入 (3) 式及 (10) 式可得

$$\frac{5R_1}{5H} = 0, \quad \frac{5rR_2}{5r} - R_1 = 0 \quad (12)$$

由 (12) 式的第一式可知  $R_1$  与  $H$  无关，并注意到相应的边界条件，则周向与径向应力为

$$R_1 = p \frac{r - r_0}{r_2 - r_0}, \quad R_2 = p \# \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} \quad (13)$$

212 位移计算

令  $A_1 = H$ ,  $A_2 = r$ , 代入 (3) 式及 (8) 式可得

$$e_{11} = \frac{1}{r} \# \frac{5u_H}{5H} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{12} = \frac{1}{r} \# \frac{5u_r}{5H} - \frac{u_r}{r}, \quad e_{21} = \frac{5u_H}{5r}, \quad e_{22} = \frac{5u_r}{5r} \quad (14)$$

用非线性关系式 (9) 来求解位移是很困难的。为求近似解, 将根号按二项式定理展开, 然后略去非线性项可得:  $E_1 = e_{11}$ ,  $E_2 = e_{22}$ , 并利用 (13)、(14) 式, 代入 (11) 式可得

$$\frac{1}{r} \# \left( \frac{5u_H}{5H} + u_r \right) = \frac{P}{E} \# \left[ \frac{r - r_0}{r_2 - r_0} + L \# \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} \right] \quad (15)$$

$$\frac{5u_r}{5r} = - \frac{P}{E} \# \left[ \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} + L \# \frac{r - r_0}{r_2 - r_0} \right] \quad (16)$$

上式与  $H$  无关, 积分并注意到  $r = r_0$ ,  $u_r = 0$ ;  $H = 0$ ,  $u_H = 0$ , 可得

$$u_r = \frac{P}{2E} \# \left[ \frac{2r_0 - r_2}{r_2 - r_0} \# r_2 \log \frac{r}{r_0} - \frac{(3r_0 - r)(r - r_0)}{2(r_2 - r_0)} - L \# \frac{(r - r_0)^2}{r_2 - r_0} \right] \quad (17)$$

$$u_H = \frac{PH}{2E} \# \left[ \frac{2r_0 - r_2}{r_2 - r_0} \# r_2 \log \frac{r}{r_0} - \frac{3(r^2 - r_0^2)}{2(r_2 - r_0)} - L \# (r_2 - r_0) \right] \quad (18)$$

令  $A_1 = H$ ,  $A_2 = r$  可得  $e_1 = i \cos H$ ,  $j \sin H$ ,  $e_2 = i \sin H$ ,  $j \cos H$ , 从而有

$$u_x = u_H \cos H + u_r \sin H, \quad u_y = -u_H \sin H + u_r \cos H \quad (19)$$

$$x_0 = r \sin H - u_H \cos H - u_r \sin H, \quad y_0 = r \cos H - r_0 + u_H \sin H - u_r \cos H \quad (20)$$

取  $p/E = 0.12$ ,  $r_1 = 4$ ,  $r_0 = 5$ ,  $r_2 = 6$ ,  $H = P/8$  求得  $L = 0$ ,  $L = 0.14$  的  $x_0$  和  $y_0$  的值见表 1~ 4。

表 1  $L = 0$  时  $x_0$  的值

Tabl 1 Value of  $x_0$  ( $L = 0$ )

$\begin{matrix} H \\ r \end{matrix}$	0	P/32	P/16	3P/32	P/8
4 0	0	0 470	0 934	1 386	1 821
4 5	0	0 485	0 965	1 433	1 885
5 0	0	0 490	0 975	1 451	1 913
5 5	0	0 485	0 967	1 442	1 905
6 0	0	0 471	0 939	1 404	1 861

表 2  $L = 0$  时  $y_0$  的值

Tabl 2 Value of  $y_0$  ( $L = 0$ )

$\begin{matrix} H \\ r \end{matrix}$	0	P/32	P/16	3P/32	P/8
4 0	- 1 014	- 1 041	- 1 122	- 1 256	- 1 440
4 5	- 0 510	- 0 536	- 0 614	- 0 742	- 0 921
5 0	0	- 0 024	- 0 096	- 0 215	- 0 381
5 5	0 509	0 488	0 424	0 319	0 173
6 0	1 012	0 995	0 943	0 857	0 737

表 3  $L = 0.14$  时  $x_0$  的值

Tabl 3 Value of  $x_0$  ( $L = 0.14$ )

$\begin{matrix} H \\ r \end{matrix}$	0	P/32	P/16	3P/32	P/8
4 0	0	0 470	0 934	1 387	1 821
4 5	0	0 482	0 959	1 425	1 874
5 0	0	0 486	0 968	1 440	1 899
5 5	0	0 482	0 961	1 433	1 895
6 0	0	0 471	0 940	1 404	1 862

表 4  $L = 0$  时  $y_0$  的值

Tabl 4 Value of  $y_0$  ( $L = 0.14$ )

$\begin{matrix} H \\ r \end{matrix}$	0	P/32	P/16	3P/32	P/8
4 0	- 0 974	- 1 001	- 1 081	- 1 214	- 1 397
4 5	- 0 500	- 0 525	- 0 602	- 0 729	- 0 905
5 0	0	- 0 024	- 0 095	- 0 212	- 0 375
5 5	0 519	0 498	0 436	0 332	0 189
6 0	1 052	1 035	0 984	0 899	0 780

### 3 讨论

#### 311 沿坐标线 H=0 (x=0), y<sub>0</sub> 的精确解

由于对称, 在 H=0 坐标线上 e<sub>21</sub>=0. 而 E<sub>z</sub>= $\frac{1}{1-e_{22}}$ -1= $\frac{1}{E}$ (R<sub>z</sub>-LR<sub>0</sub>), 经整理后可得

$$\frac{5u_r}{5r} = 1 - \frac{2E(r_2 - r_0)}{p(1 - 2L)} \# \frac{r}{r^2 + ar + b}, \quad (a = \frac{2}{1 - 2L} \left[ \frac{E}{P} (r_2 - r_0) - (1 - L)r_0 \right], \quad b = \frac{2r_0 r_2 - r_2^2}{1 - 2L})$$

积分上式并注意到 r=r<sub>0</sub>, u<sub>r</sub>=0 可得

$$u_r = r - r_0 - \frac{2E(r_2 - r_0)}{p(1 - 2L)} \# \left[ \frac{1}{2} \log \left( \frac{r^2 + ar + b}{r_0^2 + ar_0 + b} \right) - \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \left[ \arctan \frac{2r + a}{\sqrt{4b - a^2}} - \arctan \frac{2r_0 + a}{\sqrt{4b - a^2}} \right] \right]$$

沿 H=0 线, y<sub>0</sub>+u<sub>r</sub>=r-r<sub>0</sub>, 代入上式得

$$y_0 = \frac{2E(r_2 - r_0)}{p(1 - 2L)} \# \left[ \frac{1}{2} \log \left( \frac{r^2 + ar + b}{r_0^2 + ar_0 + b} \right) - \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \left[ \arctan \frac{2r + a}{\sqrt{4b - a^2}} - \arctan \frac{2r_0 + a}{\sqrt{4b - a^2}} \right] \right] \quad (21)$$

当 H=0, L=0 和 L=0.14 时, y<sub>0</sub> 的精确值见表 5, 与表 2 和表 4 中 H=0 的值比较, 相差不大。

表 5 H=0 时 y<sub>0</sub> 的精确值

Tabl 5 Exact value of y<sub>0</sub> (H=0)

r	41.0	41.5	51.0	51.5	61.0
0	-11.015	-01.510	0	01.509	11.013
0.14	-01.976	-01.500	0	01.520	11.056

#### 312 L=0 时的精确解

采用反逆解法, 假设变形前梁平面边界为矩形, 四边为 x<sub>0</sub>=L/2, y<sub>0</sub>=h/2. 则微段 dR<sub>0</sub> 为 dx<sub>0</sub> 和 dy<sub>0</sub>. 变形后 dR 变为 rdH 和 dr. 故应有

$$E_H = \frac{rdH - dx_0}{dx_0} = \frac{rdH}{dx_0} - 1, \quad E_r = \frac{dr - dy_0}{dy_0} = \frac{dr}{dy_0} - 1$$

将以上两式以及 (17) 和 (18) 式代入 (13) 式, 并令 L=0, 整理后可得

$$dx_0 = \frac{r}{1 + \frac{p}{E} \# \frac{r - r_0}{r_2 - r_0}} dH, \quad dy_0 = \frac{2E(r_2 - r_0)}{p} \# \frac{r dr}{r^2 + a_1 r + b_1} \quad (22)$$

式中

$$a_1 = 2 \left[ \frac{E}{P} (r_2 - r_0) - r_0 \right], \quad b_1 = 2r_0 r_2 - r_2^2 \quad (23)$$

积分 (22) 式的第一式并注意到 H=0, x<sub>0</sub>=0 可得: x<sub>0</sub>= $\frac{r_H}{1 + p(r - r_0) / [E(r_2 - r_0)]}$ . 当 r=r<sub>0</sub>

时, x<sub>0</sub>=r<sub>0</sub>H 由于 R<sub>H</sub>=0, 故为原长. 又由于 E<sub>H</sub>= $\frac{r_H - r_0 H}{r_0 H} = \frac{p}{E} \# \frac{r - r_0}{r_2 - r_0}$ , 故有  $\frac{p}{E} = \frac{r_2 - r_0}{r_0}$ . 可得

$$x_0 = r_0 H \quad (24)$$

即 x<sub>0</sub> 与 r 无关. 在边界上 x<sub>0</sub>=r<sub>0</sub>H=L/2, 即 L=2r<sub>0</sub>H.

将 (22)、(23) 式与 311 节中的有关式子比较可知: (21) 式亦适用于 (22) 式的积分, 并取 L=0. 此时 y<sub>0</sub> 与 H 无关. 在边界上, 令 r=r<sub>1</sub> 和 r=r<sub>2</sub> 可求得 h=y<sub>0</sub>(r<sub>2</sub>) - y<sub>0</sub>(r<sub>1</sub>). 这一方法同样适用于 LX0, 沿坐标线 H=0 时求 y<sub>0</sub> 的精确解.

为证明以上结果是正确的, 由 (20) 式可得

$$u_H = r_0 \sin H - x_0 \cos H + y_0 \sin H, \quad u_r = r - r_0 \cos H - x_0 \sin H - y_0 \cos H$$

将 (24) 和 (21) 式 ( $L=0$ ) 代入上式, 然后代入 (14) 式, 再代入 (9) 式可得

$$E_1 = \frac{P}{E} \# \frac{r - r_0}{r_2 - r_0}, \quad E_2 = \frac{P}{E} \# \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)}$$

如将 (13) 式代入 (11) 式并令  $L=0$ , 则与以上两式相同。说明结果是正确的。取  $L=0$ , 各种  $x_0$  的值见表 6。

表 6  $L=0$  时  $x_0$  的精确值  
Tabl 6 Exact value of  $x_0$  ( $L=0$ )

H	0	P/32	P/16	3P/32	P/8
$X_0$	0	01 491	01 982	11 473	11 963

$y_0$  的值即为表 5 中  $L=0$  的值。在表 1 中, 同一  $H$  的  $x_0$  略有不同, 说明仅是近似值, 与表 6 的精确值相差不大。在表 2 中, 同一  $r$  的  $y_0$  相差较大, 说明变形大时 (即  $H$  大时), 小变形解已不能应用。将表 1、2 和表 3、4 比较可知:  $L$  对结果影响不大。因此, 当变形大时仍可近似地采用反逆解法, 即取

$$E_H = \frac{r dH}{dx_0} - 1 = \frac{P}{E} \# \left[ \frac{r - r_0}{r_2 - r_0} + L \# \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} \right]$$

$$E_r = \frac{dr}{dy_0} - 1 = \frac{P}{E} \# \left[ L \# \frac{r - r_0}{r_2 - r_0} + \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} \right]$$

容易求得

$$x_0 = \frac{rH}{1 + \frac{P}{E} \# \left[ \frac{r - r_0}{r_2 - r_0} + L \# \frac{(r_2 - r_0)^2 - (r - r_0)^2}{2r(r_2 - r_0)} \right]} \quad (25)$$

$y_0$  的值即 (21) 式。可以看出变形后同一  $r$  值在变形前仍为同一  $y_0$  值 (与  $H$  无关的水平线)。由 (25) 式可知, 变形后同一  $H$  值在变形前的  $x_0$  则随  $r$  而变, 即不是一竖直线, 故不是精确解。

当  $L=0$  时, 设矩形截面梁的截面宽度为  $b$ , 则 (21) 与 (24) 式仍然适用, 且  $b$  保持不变。

参考文献:

[1] 徐芝纶. 弹性力学 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.  
 [2] Novozhilov V V. Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity [M]. Graylock Press, Rechester, N. Y., 1953.  
 [3] Timoshenko S P. Theory of Elastic Stability [M]. McGrawHill, 1961.  
 [4] 钟伟芳. 高等弹性力学 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993.