文章编号: 1001-2486(2000) 05-0083-04

逆重复 m 序列输入下 FIR 模型辨识及精度分析*

胡德文

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对离散控制系统的有限脉冲响应(FIR) 函数模型, 研究了在伪随机逆重复 m 序列输入激励下的相关辨识及其精度问题, 得到了有色噪声干扰下 FIR 参数估计精度的显式表达式。文中有仿真实例。

关键词: FIR 模型; 相关辩识; 伪随机序列; 精度分析

中图分类号: O235 文献标识码: A

FIR Model Identification and Precision Analysis under Invert-Repeated m-Sequences Input

HU De-wen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper is aimed at analyzing the identification precision of the finite impulse response (FIR) function models of discrete–time control systems under the pseudo-random invert-repeated m-sequences stimulation. An explicit formula of the correlation identification precision is given in the face of colored noises. Two simulation examples are cited to support the analyses.

Key words: FIR model; correlation identification; pseudo-random sequence; precision analysis

在文献[1]中, 作者研究了采用 m 序列辨识脉冲响应函数及其精度分析问题。但是, 当系统的输入输出值存在初始值测量偏差时, 系统辨识精度会带来较大的误差。为此, 一是可以在算法上想办法, 如在最小二乘法时引入直流偏置项。另一个途径是采用其它的输入信号。李白男[2]、钟延炯[3]等引入逆重复 m 序列作为输入激励信号, 用来克服零初始测量值和系统的慢漂移(多项式漂移)和周期性干扰对辨识的影响。钟延炯和郭爱克[4]采用了逆重复 m 序列进行丽蝇复眼感光细胞特性的研究。但是, 到目前为止, 文献中采用逆重复 m 序列辨识系统脉冲响应函数以及对非线性系统的辨识, 都是近似的公式。本文首先推导出精确的辨识公式, 在此基础上对一般情形的随机观测噪声对辨识精度的影响进行研究。最后用数值例子进行验证。

1 逆重复 m 序列输入下的相关辨识

考虑线性定常离散时间系统传递函数模型[1]:

$$y(k) = G(z)u(k) + e(k) \tag{1}$$

其中$\{y(k)\}$, $\{u(k)\}$分别为系统的输出和输入, $\{e(k)\}$为输出观测噪声。如果传递函数 $G(z)$ 的根在单位圆$|z| < 1$之内, 则(1)可用如下有限脉冲响应(FIR)函数模型逼近:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N_s} g_i u(k-i) + e(k) \tag{2}$$

设观测噪声序列$\{e(k)\}$是与输入不相关的宽平稳随机过程, 均值为零 $E\{e(t)\} = 0$, 自相关函数记为 $r(\tau)$. 记$\{y(k)\}$与$\{u(k)\}$的样本互相关函数为:

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)u(k-\tau) \tag{3}$$

记:

$$\xi(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(k)u(k-\tau) \tag{4}$$

* 收稿日期: 2000-04-05
基金项目: 模式识别国家重点实验室开放课题基金资助和高等学校骨干教师基金资助项目。
作者简介: 胡德文(1963-), 男, 教授, 博士生导师。

由(2)式采用最小二乘估计, 可得到 g_i 的估计 $\hat{g}_i(i=1\sim N_s)$ 为:

$$[\hat{g}_1, \hat{g}_2, \cdots, \hat{g}_{N_s}]^{\mathrm{T}} = \Omega_{uu}^{-1} \cdot [R_{yu}(1), R_{yu}(2), \cdots, R_{yu}(N_s)]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中, Ω_{uu} 由输入的自相关函数组成, 意义见文献[1]。由于公式中只包括了输入的自相关函数和输入输出的互相关函数, 故称为相关分析法。

逆重复 m 序列是伪随机 m 序列(逻辑"0"和"1")与二分频信号进行模 2 加后得到的[2,3], 其周期是原 m 序列的 2 倍, 即为 $2N_p$, 设幅度为 a, 在应用时, 对它加以如下约定, (i)信号从 $k=-N_s+1$ 时刻开始加入系统, 至 $k=N$ 时刻为止; (ii)输出值观测样本个数为 N, 是信号周期 $2N_p$ 的整数倍; (iii)总设定模型阶数等于信号半周期 $N_p=N_s$。在上述 3 个条件下, 根据逆重复 m 序列的性质有: $u(k+N_p)=-u(k)$, $\forall k$. 因此, 输入信号的周期均值为零。这是逆重复 m 序列在应用中区别于 m 序列的一条优点。根据逆重复 m 序列的产生方法, 幅度变化为 $\pm a$ 的这种信号则是相应的幅度 $\pm a$ 变化的 m 序列与周期方波序列 $(-1)^{k-1}$ 相乘得到的。在 m 序列的一个周期 N_p 的时间内, 其和为 $-a$, 因此:

$$\sum_{\tau=1}^{N_p}(-1)^{\tau}u(k-\tau) = (-1)^k a, \quad \forall k = 1\sim N \tag{6}$$

逆重复 m 序列自相关函数为:

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} a^2, & \tau = 0 \\ (-1)^{\tau+1}a^2/N_p, & 0 < |\tau| < N_p - 1 \end{cases} \tag{7}$$

令 $N_s \times N_s$ 维 Ω_{uu} 矩阵逆具有如下形式:

$$\Omega_{uu}^{-1} = \begin{bmatrix} \rho & \delta & -\delta & \cdots & \delta & -\delta \\ \delta & \rho & \delta & & & \delta \\ -\delta & \delta & \rho & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\delta \\ \delta & & & \ddots & \ddots & \delta \\ -\delta & \delta & \cdots & -\delta & \delta & \rho \end{bmatrix} \tag{8}$$

可以证明, 其中 ρ 和 δ 两值满足:

$$\rho = \frac{N_p}{N_p+1} \cdot \frac{2}{a^2}, \qquad \delta = \frac{N_p}{N_p+1} \cdot \frac{1}{a^2} \tag{9}$$

由此得到如下结论。

定理 1 FIR 模型相关辨识的参数估计公式为:

$$\hat{g}_i = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{N_p}{N_p+1} \cdot \left[R_{yu}(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau+i}R_{yu}(\tau)\right], \ i = 1\sim N_s \tag{10}$$

目前有很多参考书从连续系统的 Wiener-Hopf 方程离散化出发, 在推导的最后将上面公式中的第二项忽略为零, 这是不正确的, 这样势必带来很大的计算误差。

推论 1 FIR 模型相关辨识的参数估计可采用:

$$\hat{g}_i = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{N_p}{N_p+1} \cdot \left[R_{yu}(i) + (-1)^i \frac{a}{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k y(k)\right], \ i = 1\sim N_s \tag{11}$$

证明 在定理 1 的(10)式中,

$$\sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau+i}R_{yu}(\tau) = (-1)^i \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}y(k)\sum_{\tau=1}^{N_p}(-1)^{\tau}u(k-\tau) = (-1)^i \frac{a}{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k y(k)$$

最后一个等式利用了公式(6)。证毕。

2 逆重复 m 序列输入下相关辨识的精度

下面确定在逆重复 m 序列输入下 FIR 模型参数估计值的统计特性。

定理 2 设观测噪声 $\{e(t)\}$ 自相关函数满足:

$$\text{当 } \tau > n_s \text{ 时}, r(\tau) = 0, \text{且 } n_s < N_s \tag{12}$$

噪声均值 $E\{e(k)\}$ 可以不为零, 采用逆重复 m 序列时 FIR 模型辨识满足如下统计特性:

i) 无偏性:

$$E\{\hat{g}_i\} = g_i,\ i = 1 \sim N_s \tag{13}$$

ii) 均方误差:

$$\sum_{\tau=1}^{N_s} E\{(\hat{g}_i - g_i)^2\} = 2 \cdot \frac{N_p}{N_{p+1}} \cdot \frac{N_s}{N} \cdot \frac{1}{a^2}\left[r(0) + \sum_{\tau=1}^{n_s}(-1)^{\tau}(1 - \frac{\tau}{N}) r(\tau)\right] \tag{14}$$

证明　先证无偏性。根据(4)和(5)式有:

$$\hat{g}_i - g_i = \frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p + 1}\left[\xi(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau+i}\xi(\tau)\right] \tag{15}$$

其中:

$$E\{\xi(\tau)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\{e(k)\} u(k - \tau) = E\{e(k)\} \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k - \tau) = 0 \tag{16}$$

故得: $E\{\hat{g}_i - g_i\} = 0$, 即无偏性得证, 下面证明性质 ii), 利用(6)式

$$\sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau}\xi(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[e(k)\sum_{\tau=1}^{N_p}(-1)^{\tau} u(k - \tau)\right] = \frac{a}{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k e(k) \tag{17}$$

故

$$E\left\{\left[\sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau}\xi(\tau)\right]^2\right\} = \frac{a^2}{N}\left[r(0) + 2\sum_{\tau=1}^{n_s}(-1)^{\tau}(1 - \frac{\tau}{N}) r(\tau)\right] \tag{18}$$

根据逆重复 m 序列的自相关函数性质得

$$\begin{aligned}\sum_{\tau=1}^{N_s} E\{\xi^2(\tau)\} &= \frac{N_p}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}[r(i - j) R_{uu}(i, j)] \\ &= \frac{N_p}{N} r(0) a^2 + 2\frac{a^2}{N}\sum_{\tau=1}^{n_s}(-1)^{\tau+1}(1 - \frac{\tau}{N}) r(\tau)\end{aligned} \tag{19}$$

再根据(15)式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_s} E\left\{(\hat{g}_i - g_i)^2\right\} &= \left(\frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p + 1}\right)^2 \sum_{i=1}^{N_s} E\left\{\left[\xi(i) + \sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau+i}\xi(\tau)\right]^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{a^2}\frac{N_p}{N_p + 1}\right)^2\left\{\sum_{\tau=1}^{N_s} E\{\xi^2(\tau)\} + (N_p + 2) E\left\{\left[\sum_{\tau=1}^{N_s}(-1)^{\tau}\xi(\tau)\right]^2\right\}\right\}\end{aligned}$$

将(18)和(19)式代入上式, 最终可得到(14)式。证毕。

通过以上推导, 得到了在有色噪声干扰下采用逆重复 m 序列辨识 FIR 模型时精度的显式解析式。特别地, 若观测噪声是方差为 σ^2 的白噪声, 那么简单地有:

$$\sum_{i=1}^{N_s} E\left\{(\hat{g}_i - g_i)^2\right\} = 2 \cdot \frac{N_p}{N_p + 1} \cdot \frac{\sigma^2}{a^2} \cdot \frac{N_s}{N} \tag{20}$$

因此有如下结论。

推论 2　在逆重复 m 序列输入及白噪声干扰下, FIR 模型参数估计的精度约为噪信比 σ^2/a^2 与阶次样本数比 N_s/N 乘积的 2 倍。

值得指出的是, 这一特殊情况下的结果与 m 序列输入下的结果是完全相同的, 因此, 不能简单地认为采用逆重复 m 序列时的精度要比 m 序列情形的高。

3　实例分析与结论

考虑如下 2 个系统

$$y(k) = 1.5y(k - 1) - 0.7y(k - 2) + u(k - 1) + 0.5u(k - 2) \tag{21}$$

$$y(k) = -1.5y(k-1) - 0.7y(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2) \tag{22}$$

采用周期为 126 的逆重复 m 序列作为各系统的输入, 2 个周期 252 点加预激励半个周期 63 点, 幅度为 1。不加任何干扰噪声。分别采用本文公式(10)和文献常采用的简化公式:

$$\hat{g}_i = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{N_p}{N_p + 1} \cdot R_{yu}(i),\ i = 1 \sim N_s \tag{23}$$

进行计算。通过仿真结果图 1 和图 2 看出, 当系统的极点在单位圆内的右半平面时, 采用(23)式近似的误差较小, 如对于第 1 个系统, 用(23)式的计算结果几乎看不出误差, 而该模型恰恰是系统辨识文献中广泛用来进行各种辨识仿真计算的标准模型。很明显, 对于有极点在单位圆内的左半平面的系统, (23)式具有很大的误差, 只有采用本文推导的公式(10)才能得到正确的结果。

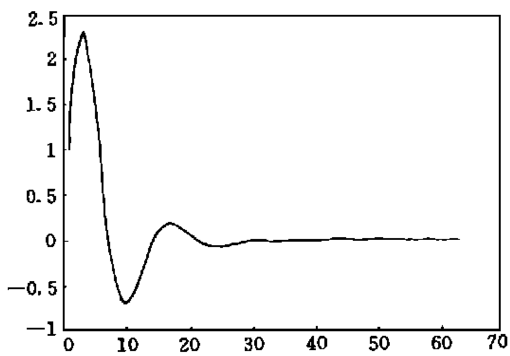

图 1 系统(21)式的仿真比较结果

Fig. 1 Simulation comparative results for System (21)

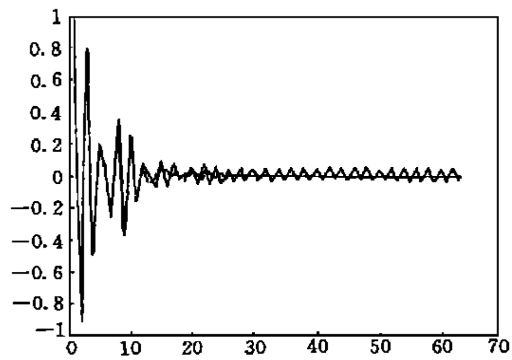

图 2 系统(22)式的仿真比较结果

Fig. 2 Simulation comparative results for System (22)

逆重复 m 序列的辨识精度不受初始测量值误差的影响, 这是一个大的优点。由以上分析可见, 逆重复 m 序列输入虽然都是持续激励信号, 但 FIR 模型参数估计的精度不可能达到最优输入设计所能达到的值, 甚至会远离这一效果。如果在辨识中忽略逆重复 m 序列非零点自相关函数值 $\pm a^2/N_p$, 尽管其值相对很小且正负相错, 但是, 系统估计误差将不随样本数 N 的增加而收敛。

参考文献:

[1] 胡德文. 有色噪声下 FIR 模型相关辨识精度分析[J]. 国防科技大学学报, 21(3), 1998.

[2] 李白男. 伪随机信号及相关辨识[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[3] 钟延炯. 逆重复 m 序列及系统辨识[J]. 自动化学报, 5(2), 1979.

[4] 钟延炯, 郭爱克等. 用逆重复序列相关分析法辨识丽蝇细胞光电转换系统的动态特性[J]. 中国科学(B 辑), 1982.