

文章编号: 1001-2486 (2000) 05-0109-04

## 泥沙传输方程广义初边值问题的解析解与差分解比较\*

熊岳山

(国防科技大学计算机学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** Cheng 提出了泥沙传输问题的广义底边界条件并导出了具有复杂形式的解析解, 解析解的求解过程中还需求解两个超越方程。本文一方面分析了解析解的复杂性, 简化了超越方程根的搜索区间, 另一方面, 通过数值试验, 得到了一类稳定的差分格式, 格式参数为  $0.48 \leq \Theta \leq 1$ , 数值例子表明: 对于稳定的差分格式, 差分数值解具有很好的逼近效果。

**关键词:** 泥沙; 传输; 广义边值问题; 解析解; 差分方法

中图分类号: O241 文献标识码: A

### Comparison Results between the Analytical Solution and the Difference Numerical Solution for the Sediment Transport Equation

XIONG Yue-shan

(College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Based on the generalized bottom boundary condition proposed by Cheng, Cheng derived an analytical solution with complicated form and we need to solve two transcend equations in order to get the analytical solution. In this paper, we analyse the difficulties in the analytical solution calculation. We reduce the searching regions for finding roots of the transcend equations easily. On the other hand, according to the numerical results, we found that the constructed difference schemes with scheme parameter  $0.48 \leq \Theta \leq 1$  are stable and identify with the analytical solution.

**Key words:** sediment; transport; generalized boundary condition; analytical solution; difference method

## 1 解析解分析

文[1]中, Cheng 给出了非平衡态泥沙传输方程的广义底边界条件, 该条件依赖于两个参数: 泥沙淤积速度和平衡态泥沙底集中量, Cheng 利用 Laplace 变换以及复变函数中的 Jordan 引理和残数定理, 导出了基于广义边界条件下的泥沙传输问题的解析解。然而, 文[1]中所给出的解析解形式复杂, 不易求解计算, 需要求解两个超越方程的根, 这项工作当超越方程中出现的函数存在间断点时变得复杂而难以求解。

考虑下面的一维泥沙传输方程:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial C}{\partial Z} + K \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \quad (1)$$

广义边界条件和初始条件<sup>[1]</sup>为:

$$\begin{aligned} \left[ K \frac{\partial C}{\partial T} + C \right]_{Z=1} &= 0 \\ \left[ K \frac{\partial C}{\partial Z} + C \right]_{Z=0} &= B(C - C^*) \\ C(Z, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

方程(1)、(2)的解析解<sup>[1]</sup>为:

$$C(Z, T) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(\Theta, \Phi, Z, q) e^{(q-1/4K)T} dq \quad (3)$$

\* 收稿日期: 2000-01-05  
作者简介: 熊岳山(1963-), 男, 博士, 副教授。

这里

$$F(\Theta, \Phi, Z, q) = \frac{[(-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} + (LM\Theta - N\Theta)e^{\Phi Z}]}{e^{-1/2K}(q - \frac{1}{4K})[-2(Kq - \frac{1}{4})\sinh\sqrt{\frac{q}{K}} - B\sinh\sqrt{\frac{q}{K}} - 2BK\sqrt{\frac{q}{K}}\cosh\sqrt{\frac{q}{K}}]}$$

$\Theta = -1/2K - \sqrt{q/K}$ ,  $\Phi = -1/2K + \sqrt{q/K}$ ,  $L = (1 - B + BC^*)$ ,  $M\Phi = (K\Phi e^{\Phi} + e^{\Phi})$ ,  $M\Theta = (K\Theta e^{\Theta} + e^{\Theta})$ ,  $N\Phi = (K\Phi + 1 - B)$ , 且  $N\Theta = (K\Theta + 1 - B)$ 。(3)式中的被积函数是  $q$  的单值函数,  $q = 1/4K$  是其单重极点, 其它的奇异点是下面两个超越方程的根( $q = 0$  为可去奇点):

$$\tanh\sqrt{\frac{q}{K}} = \frac{2BK\sqrt{q/K}}{0.5 - 2Kq - B}, \text{ 当 } q \text{ 为非负实数} \tag{4}$$

$$\tan\sqrt{\frac{-q}{K}} = \frac{2BK\sqrt{-q/K}}{0.5 - 2Kq - B}, \text{ 当 } q \text{ 为负实数} \tag{5}$$

由 Jordan 引理和残数定理, (3) 式可化为

$$C(Z, T) = C^* e^{-Z/K} + \sum \frac{e^{(q-1/4K)T} [(-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} + (LM\Theta - N\Theta)e^{\Phi Z}]}{\frac{\partial}{\partial q} [e^{-1/2K}(q - \frac{1}{4K})[-2(Kq - \frac{1}{4})\sinh\sqrt{\frac{q}{K}} - B\sinh\sqrt{\frac{q}{K}} - 2BK\sqrt{\frac{q}{K}}\cosh\sqrt{\frac{q}{K}}]}]} \tag{6}$$

(6) 式中的求和是对所有(3) 式中被积函数的不可去奇点( $q = 1/4K$  除外)。

事实上, 不难证明当  $B \geq 0.5$  时(参见图 1), 方程(4) 仅有一可去奇点  $q = 0$ , Cheng 给出的例子满足这个条件。然而对方程(5), 我们首先证明存在无穷多个不可去奇点(参见图 2)。

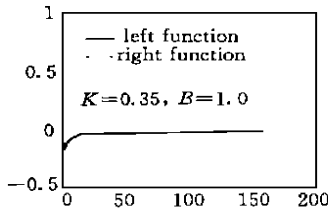


图 1 方程(4) 的图形  
Fig. 1 The graph of functions in eq (4)

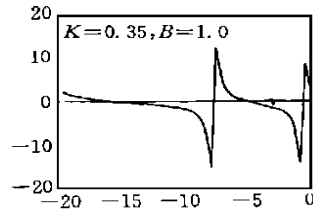


图 2 方程(5) 的根分布  
Fig. 2 The roots distribution of eq (5)

事实上, 取  $q_m = -m^2\pi^2K$  和整数  $m$ ,  $f(q_m) = \tan\sqrt{\frac{-q_m}{K}} - \frac{2BK\sqrt{-q_m/K}}{0.5 - 2Kq_m - B} \rightarrow 0$ , 当  $m \rightarrow \infty$ , 另一方面, 当  $q < 0$ , 由  $\Theta = \Phi$ , 以及  $(-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} = (-LM\Theta + N\Theta)e^{\Phi Z}$ , 得

$$\begin{aligned} & ((-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} + (LM\Theta - N\Theta)e^{\Phi Z}) \\ &= ((-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} - (-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z}) \\ &= 2\text{Im}((-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z}) \cdot i \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} & \text{Im}((-LM\Phi + N\Phi)e^{\Theta Z} \Big|_{q=q_m}) \\ &= e^{-\frac{Z}{2K}} [e^{-\frac{1}{2K}} (-1)^{m+1} (1 - B + BC^*) (Km\pi\cos(m\pi Z) - \frac{1}{2}\sin(m\pi Z)) \\ & \quad + (Km\pi\cos(m\pi Z) - (\frac{1}{2} - B)\sin(m\pi Z))] \end{aligned}$$

上式对已知的  $K, B, C^*$ , 关于  $m$  不恒为零, 至此, 我们的确证明了方程(5) 存在无穷多个不可去奇点。

进一步, (6) 式可改写为:

$$C(Z, T) = C_* e^{-Z/K} + \sum \frac{2e^{(q-1/4K)T - \frac{Z-1}{2K}f(K, B, C_*, Z, q)}}{(q - \frac{1}{4K}) \left[ (-2K - B) \sin \sqrt{\frac{-q}{K}} Z + \frac{2(Kq - \frac{1}{4}) + B + 2BK}{2\sqrt{-Kq}} \cos \sqrt{\frac{-q}{K}} Z \right]} \quad (7)$$

这里

$$f(K, B, C_*, Z, q) = \sqrt{-Kq} \cos \sqrt{\frac{-q}{K}} Z - \left( \frac{1}{2} - B \right) \sin \sqrt{\frac{-q}{K}} Z - e^{-\frac{1}{2K}} (1 - B + BC_*) \left[ \frac{1}{2} \sin \left( \sqrt{\frac{-q}{K}} (1 - Z) \right) + \sqrt{-Kq} \cos \left( \sqrt{\frac{-q}{K}} (1 - Z) \right) \right]$$

(7)式中的求和是对超越方程(5)的非零解进行的。图3~6中的解析解用到(5)式的两个根  $q = -0.801469$ ,  $q = -5.19297$ , 对应的参数为  $B = 1.0$ ,  $K = 0.35$ ,  $C_* = 2.0$ ,  $\Theta$  分别为 0.47, 0.48, 0.50, 1.0。

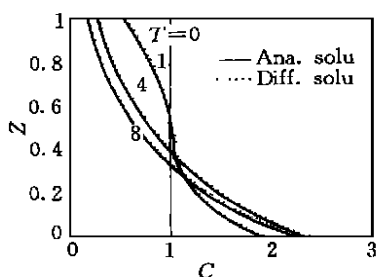


图3 集中量,  $C$

Fig. 3 Concentration,  $C$

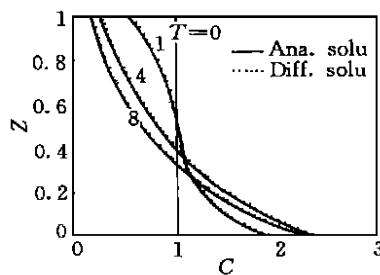


图4 集中量,  $C$

Fig. 4 Concentration,  $C$

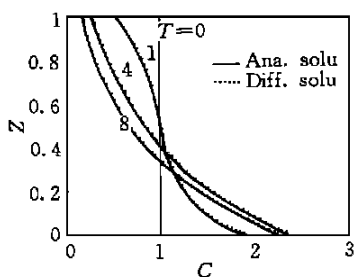


图5 集中量,  $C$

Fig. 5 Concentration,  $C$

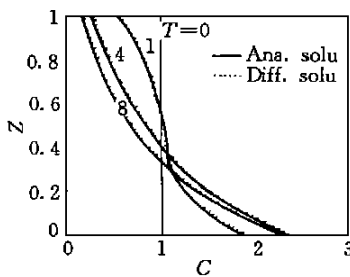


图6 集中量,  $C$

Fig. 6 Concentration,  $C$

## 2 差分数值解

基于方程(1)、(2)的解析解形式(6)或(7)的复杂性,我们选用差分方法来求解。因为方程(1)为线性传输-扩散方程,可用Fourier方法来分析其初边值问题差分方法的稳定性条件<sup>[2]</sup>,对不同的边界条件,一般来说对应的稳定性条件也不同。我们通过数值试验得到了方程(1)、(2)的差分格式稳定的条件(取  $\Delta Z = \Delta T = 0.01$ ),差分数值解和前面计算的解析解相吻合。我们发现,当格式参数取  $0.48 \leq \Theta \leq 1$ ,差分格式是稳定的,当  $\Theta = 0.47$ 时,格式出现不稳定(见图3~6)。

实际计算时,考虑方程(1)、(2)的下面形式的差分方程:

$$\begin{aligned} C_T(Z, T) &= C_Z(Z, T) + K\Theta C_{ZZ}(Z, T + \Delta T) + K(1 - \Theta)C_{ZZ}(Z, T), \\ [KC_Z(1, T) + C(1, T)] &= 0, \\ [KC_Z(0, T) + C(0, T)] &= B(C(0, T) - C^*), \\ C(Z, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

这里  $0 \leq \Theta \leq 1$ ,  $\Theta = 0$  为显格式, 否则为隐格式,  $\Theta = 0.5$  为著名的 Crank-Nicolson 格式, 且

$$\begin{aligned} C_T(Z, T) &= \frac{C(Z, T + \Delta T) - C(Z, T)}{\Delta T}, \quad C_Z(Z, T) = \frac{C(Z + \Delta Z, T) - C(Z, T)}{\Delta Z} \\ C_Z(Z, T) &= \frac{C(Z, T) - C(Z - \Delta Z, T)}{\Delta Z}, \quad C_{ZZ}(Z, T) = \frac{C(Z + \Delta Z, T) - C(Z - \Delta Z, T)}{2\Delta Z} \\ C_{ZZ}(Z, T) &= \frac{C(Z + \Delta Z, T) - 2C(Z, T) + C(Z - \Delta Z, T)}{(\Delta Z)^2}. \end{aligned}$$

### 3 小结

由于式(4)、(5)中出现的函数有一些不连续点,这就导致求解超越方程(4)、(5)的困难。特别当根靠近不连续点时,容易产生根丢失的现象。容易验证,当  $B \geq 0.5$  时,(4)式的解集除  $q = 0$  外是空的,仅需求解(7)式的根来代替方程(5)的求解。更一般地,对任意的  $B$ , 当  $q > \max\{\frac{0.5 - B}{2K}, 0\}$  时,方程(4)的解集是空的。因此(4)式与下式等价,

$$\tanh \sqrt{\frac{q}{K}} = \frac{2BK \sqrt{q/K}}{0.5 - 2Kq - B}, \quad \text{当 } 0 \leq q < \max\{\frac{0.5 - B}{2K}, 0\} \quad (9)$$

另一方面,尽管方程(5)存在无限多个根,但由于(3)式中  $\exp(qT)$  项的出现,当  $q \rightarrow -\infty$ , 相应的残数值指数级地收敛于 0, 因此,可以将(5)式改为:

$$\tan \sqrt{\frac{-q}{K}} = \frac{2BK \sqrt{-q/K}}{0.5 - 2Kq - B}, \quad \text{当 } -15 < q < 0 \quad (10)$$

显然,方程(8)、(9)缩小了根的搜索区间,从而节省了计算时间。

综上所述,形式解(6)不能直接用于计算,我们需要超越方程(4)、(5)的根,求解过程中需要跳过超越方程所出现的函数不连续点,由于超越方程的根有无限多个,实际计算时,只能选取有限个根。因此,建议实际计算时仅需对超越方程(9)、(10)来求解原来超越方程(4)、(5)的根。另一方面,通过比较,我们建议泥沙传输方程广义初边值的实际计算宜采用稳定的差分方法来计算。

### 参考文献:

- [1] Cheng K wokming James. Bottom-boundary condition for nonequilibrium transport of sediment[J]. Journal of Geophysical Research, 1984, 89: 8209-8214.
- [2] Richtmyer R D, Morton K W. Finite Difference for Initial-value Problem[M]. 2nd edition, Interscience, New York, 1967.