

文章编号: 1001-2486 (2000) 05-0113-04

## 基于 Taylor 展开的自由拉氏方法\*

毛益明, 袁圣付, 汤文辉

(国防科技大学理学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 导出了基于泰勒展开的自由拉氏方法(简称为 BTE 方法), 编制了一维程序, 对激波管和飞片撞靶两个问题进行了数值模拟, 所得结果与传统拉氏差分方法的结果一致。

**关键词:** Taylor 展开; 激波; 数值模拟

**中图分类号:** O351.2    **文献标识码:** A

## The Free-Lagrangian Method Based on Taylor's Expansion

MAO Yi-ming, YUAN Sheng-fu, TANG Wen-hui

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The Free-Lagrangian Method Based on Taylor's Expansion is developed. A one-dimensional hydrodynamic code is written according to this method. Both examples of the shock tube and impact of flyer on the target are simulated by this code. The results are in good accordance with that obtained by traditional Lagrangian difference code.

**Key words:** Taylor's expansion; shock wave; numerical simulation

在可压缩流体力学的数值模拟中, 传统的拉氏方法是一种比较成熟而又常用的方法。其主要的优点是物质界面清晰, 质量、动量和能量的守恒性好, 缺点是不能较好地处理大变形问题。解决大变形的常用方法是“重分”网格。这样做的结果是大大增加了运算量, 并导致不希望的质量、动量和能量的扩散。而且, 即使采取了这样的方法, 当变形达到某一极限时, 拉氏方法仍然是无能为力的。欧拉方法可以处理大变形问题, 但物质界面不易保持。自 20 世纪 70 年代以来, 国际上发展了一种关于流体力学数值模拟的新方法, 即自由拉氏方法, 以期能较好地解决大变形问题<sup>[1,2]</sup>。

本文尝试导出的基于泰勒展开的自由拉氏方法(The Free-Lagrangian Method Based on Taylor's Expansion, 简称为 BTE 方法), 便是从自由拉氏方法的思想出发的。这种方法考虑的是一系列随流体运动的粒子, 并以这样的粒子代替拉氏单元。质量并不与这些粒子联系, 但在这些粒子上保持速度、密度、内能和压强的痕迹。每个粒子的物理量决定于该粒子与其近邻粒子的相互作用, 我们利用 Taylor 展开来体现这种相互作用。由于近邻是粒子而不是网格单元, 而粒子是可以随流体运动而任意调整的, 所以从理论上说, BTE 方法可以处理任意畸变问题。

## 1 计算方法

求解流体动力学问题的基本方程是质量、动量、能量三个守恒方程和物态方程。它们可表示为

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot \nabla \cdot U \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{P}{\rho} \cdot \nabla \cdot U \quad (3)$$

$$P = P(\rho, E) \quad (4)$$

其中  $E$  为比内能,  $U$  为速度,  $P$  为压强,  $\rho$  为密度。在传统拉氏方法中, 仅方程(2)是直接求解的。在获

\* 收稿日期: 2000-02-18

作者简介: 毛益明(1969), 男, 讲师。

得网格点的加速度后,由网格点的运动确定新的单元体积或密度,从而间接解出方程(1)。

与传统拉氏法不同,本文讨论的基于 Taylor 展开的自由拉氏法将直接求解方程(1)~(3)。求解的差分方程组为

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n (1 - \Delta t (\nabla \cdot U)_i^n) \quad (5)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t (\nabla \cdot P)_i^n / \rho_i^n \quad (6)$$

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \Delta t (\nabla \cdot U)_i^n P_i^n / \rho_i^n \quad (7)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t (U_i^{n+1} + U_i^n) / 2 \quad (8)$$

$$P_i^{n+1} = P(\rho_i^{n+1}, E_i^{n+1}) \quad (9)$$

式中  $\Delta t$  为时间步长,下标  $i$  表示第  $i$  个粒子,上标  $n$  表示第  $n$  时刻。显然,要直接求解方程(5)~(7),必需先求出  $i$  粒子处的  $\nabla \cdot U$  和  $\nabla \cdot P$ 。这两个量可以表示成空间偏导数的组合,因而需求出  $i$  粒子处  $U$  和  $P$  的空间偏导数。本文的方法就是利用 Taylor 展开来求解空间偏导,这也是我们将本文所讨论的方法称之为基于 Taylor 展开的自由拉氏法的原因。在求出  $\nabla \cdot P$  和  $\nabla \cdot U$  后,就可得到每一粒子在新时刻的  $U, \rho, P$  和  $E$  的值。在下一个时间步长的计算中,每个粒子的近邻可能变化,计算  $\nabla \cdot U$  和  $\nabla \cdot P$  时要选择新的近邻。下面讨论具体计算过程中的一些问题。

### 1.1 $\nabla \cdot U$ 和 $\nabla \cdot P$ 的求解

$\nabla \cdot U$  和  $\nabla \cdot P$  的求解是本方法不同于其它无网格方法的关键点所在。为了简单起见,在一维空间讨论问题。一维情况下,  $\nabla \cdot U$  即为  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\nabla \cdot P$  为  $\frac{\partial P}{\partial x}$ 。可以认为,流场中某点处的流场物理量对空间的偏导数值由该点及其近邻处的流场物理量值确定<sup>[3]</sup>。因此,可以在物理空间直接对流场参量的空间偏导数进行离散,从而获得偏导数的值。

考虑流场空间  $O$  点处的流场参数  $A$ ,  $A$  的空间导数  $\partial A|_O$  由  $O$  点及其近邻处的流场物理量值完全确定,假定这种确定关系是线性的,即

$$\partial A|_O = f(\Sigma O) = cA_{\Sigma O} \quad (10)$$

$c$  为待定系数。

假如  $O$  点的近邻有  $m-1$  个,记这  $m$  个点(包含  $O$  点)为  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , 则(10)式变为

$$\partial A|_O = \sum_{i=1}^m c_i A(p_i) \quad (11)$$

因为这  $m$  个点空间上与  $O$  点很接近,所以可将  $A(p_i)$  在  $O$  点进行 Taylor 展开,即

$$A(p_i) = A|_O + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} h_i^n \frac{\partial^n A}{\partial x^n} |_O \quad (12)$$

上式中  $h_i = x_{p_i} - x_O$ 。将(12)式代入(11)式,整理可得

$$\begin{aligned} \partial A|_O = & \left[ \sum_{i=1}^m c_i \right] A|_O + \left[ \sum_{i=1}^m c_i h_i \right] \frac{\partial A}{\partial x} |_O + \left[ \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} c_i h_i^2 \right] \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} |_O \\ & + \left[ \sum_{i=1}^m \frac{1}{3!} c_i h_i^3 \right] \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} |_O + E_1 \end{aligned} \quad (13)$$

式中  $E_1$  为截断误差。

下面确定系数  $c_i (i=1, 2, \dots, m)$ 。我们取  $m=3$ (即考虑 3 个近邻)。对于一维流体力学问题,我们需要计算的空间导数项  $\partial A|_O$  为  $\frac{\partial A}{\partial x} |_O$ 。可以令(13)式中

$$\sum_{i=1}^3 c_i = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^3 c_i h_i = 1 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} c_i h_i^2 = 0 \quad (16)$$

联立求解方程(14)、(15)和(16), 即可得到  $c_i (i=1, 2, 3)$  的值

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-(h_3 + h_2)}{(h_3 - h_1)(h_2 - h_1)} \\ c_2 &= \frac{h_3 + h_1}{(h_3 - h_2)(h_2 - h_1)} \\ c_3 &= \frac{-(h_2 + h_1)}{(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)} \end{aligned}$$

可以看出, 所计算的  $c_i (i=1, 2, 3)$  具有  $h_i^{-1}$  的量级。所以, 由(13)式可知, 所得到的空间偏导数  $\frac{\partial A}{\partial x}|_i$  具有二阶精度。

在解出  $c_i$  的值后, 将其代入(11)即可得到流场物理量  $A$  的空间偏导数  $\frac{\partial A}{\partial x}|_i$  为

$$\frac{\partial A}{\partial x}|_i = c_1 A|_{i1} + c_2 A|_{i2} + c_3 A|_{i3} \quad (17)$$

## 1.2 人为粘性

为了能模拟激波的强间断现象, 需要引入人为粘性。我们采用如下形式的人为粘性项

$$q_i = \begin{cases} \alpha \Delta x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \beta Q_i (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^2, & \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为粘性系数, 其数值可以在计算中加以调整。

## 2 算例

### 2.1 激波管问题

考虑一维激波管问题, 初始参数分布为:

$$(0.6 \leq x(\text{cm}) \leq 0, P = 100\text{GPa}, \rho = 1\text{g/cm}^3, \gamma = 1.4$$

$$0 \leq x(\text{cm}) \leq 0.6, P = 21.54\text{GPa}, \rho = 0.25\text{g/cm}^3, \gamma = 1.4$$

其中  $\gamma$  为绝热指数。利用 BTE 方法, 得到  $t = 0.1\mu\text{s}$  和  $t = 0.16\mu\text{s}$  时刻流场参数的空间分布如图 1 所示。为便于比较, 图中还给出了传统拉氏差分方法的结果。

### 2.2 飞片撞靶问题

设飞片和靶板均为铝, 飞片速度为  $500\text{m/s}$ 。图 2 给出了  $t = 0.1\mu\text{s}$  和  $t = 0.2\mu\text{s}$  时刻的密度和压强分布。为便于比较, 同时给出了传统拉氏差分法的计算结果。

分析图 1 和图 2, 可以看出, 两种数值计算结果吻合很好。这说明 BTE 方法的结果是可信的。BTE 方法的一维程序实现非常简单, 其程序代码与传统拉氏差分方法的相比要简短得多。但数值实验表明, 运行效率丝毫不低于传统拉氏差分方法。但若将该方法推广应用于二、三维不定常流动问题的求解, 考虑到需要搜索近邻粒子, 程序的运行效率预计会低于传统拉氏差分方法。

## 3 结束语

BTE 方法是一种纯粒子方法。其最大的特点是: 不需要网格, 可以在不等空间步长情况下将流体力学微分方程进行离散求解, 方法简洁, 程序实现简单。本文的工作只是对该方法的一点抛砖引玉式的介绍。虽然从一维问题的数值模拟结果来看, 这种方法在非定常无粘流动问题的求解方面具有比较明显的优越性, 但是该方法的发展前景如何仍将取决于它是否能比较方便地拓展到高维空间中去。我们的工作刚刚开始, 有待于进一步改善和扩展。

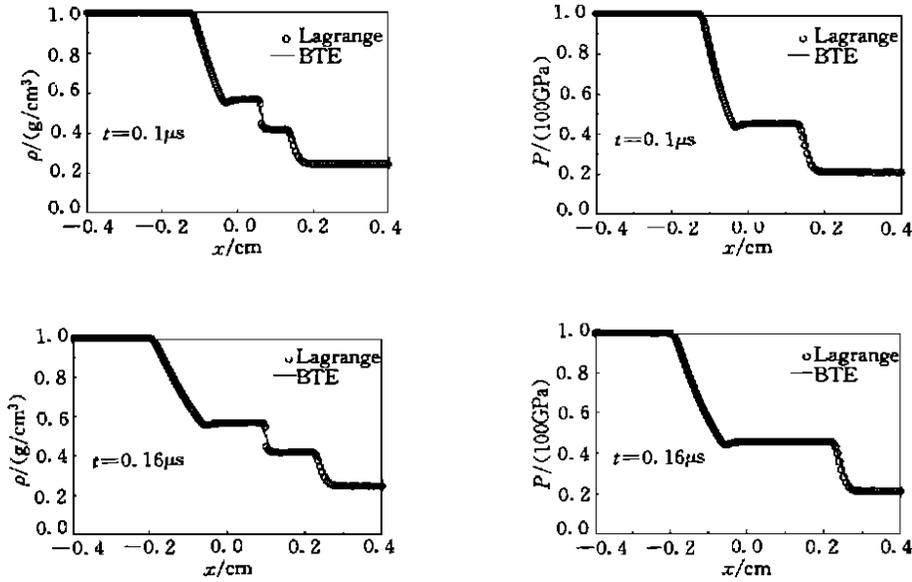


图1 激波管问题中的密度、压强分布

Fig. 1 Density and pressure distribution for solution to 1- D shock tube problem

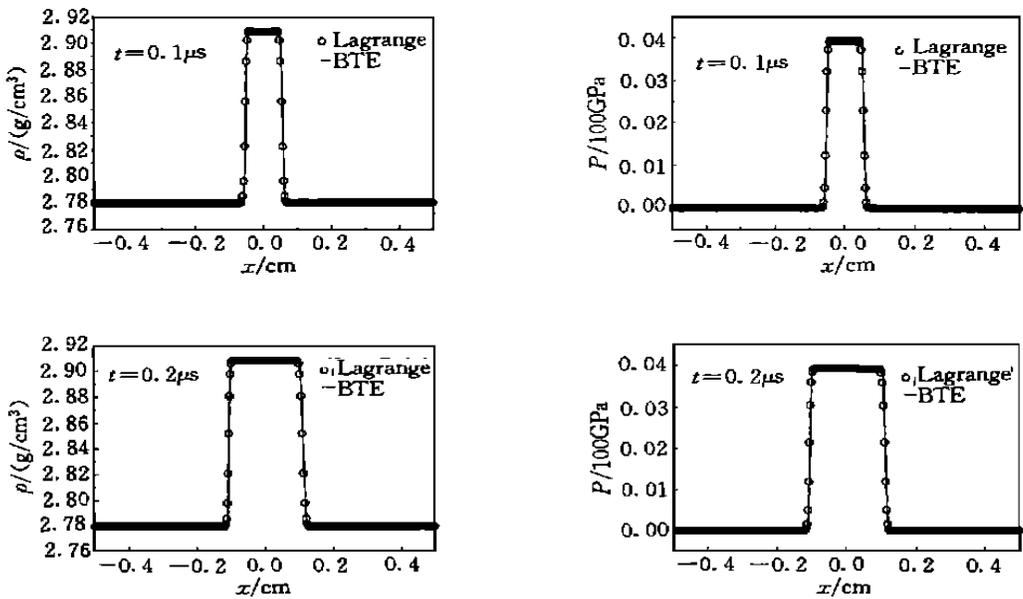


图2 飞片撞靶问题中的密度和压强分布

Fig. 2 Density and pressure distribution for solution to plane flyer impact on target

参考文献:

[1] 岳宗五, 汤文辉. 模拟冲击波传播规律的自由拉氏法[J]. 高压物理学报, 1998, 12(3): 227.

[2] Clark R A. Compressible Lagrangian hydrodynamics without Lagrangian cells [C]. In: Fritts M J, Crowley W P, Trease H, ed. Lecture Notes in Physics Berlin: Springer, 1985, 238: 281~ 294.

[3] 毛益明. 光滑粒子流体动力学数值模拟方法研究[D]. 硕士学位论文, 长沙: 国防科技大学研究生院, 2000. 1.