

文章编号: 1001-2486 (2000) 06-0001-05

## 基于 Hill 方程的编队卫星群运动分析与轨道设计\*

张玉锬, 戴金海, 王石, 任萱

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 从 Hill 方程出发, 研究了绕飞轨道的性质及编队卫星群的轨道设计方法。从三方面对绕飞轨道进行了描述: 坐标平面投影, 与坐标平面的夹角, 绕飞轨道根数。编队卫星群的轨道设计分两步进行: 先求基本环绕卫星的轨道根数; 再求其它环绕卫星的轨道根数。仿真结果表明, 此方法适用于编队飞行的初步设计。

**关键词:** Hill 方程; 编队卫星群; 绕飞轨道; 轨道设计

**中图分类号:** V412      **文献标识码:** A

## Motion Analysis and Orbit Design of Formation Flying Satellites Based on Hill-Equation

ZHANG Yu-kun, DAI Jin-hai, WANG Shi, REN Xun

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In this paper, based on the Hill-equation, the property of the flying-around orbit and the orbit design method of formation flying satellites are studied. The flying-around orbit is described in three respects: the coordinate-plane projection, the angle with the coordinate-plane, flying-around orbit elements. The orbit design of formation flying satellites is done in two steps: first the basic surrounding satellite, then the other surrounding satellites. Numerical results show that this method is suitable for the preliminary design of formation flying.

**Key words:** Hill-equation; formation flying satellites; flying-around orbit; orbit design

随着小卫星技术的发展, 若干颗微小卫星编队飞行的思想日益引起人们的重视。编队卫星群由一个参考卫星(此可有可无)和若干环绕卫星组成。参考卫星若确实存在, 则称为实在参考卫星; 若不存在, 则称为虚拟参考卫星。参考卫星与环绕卫星纬度幅角基本相同, 确保相伴飞行; 同时轨道倾角及偏心率有微小的不同, 确保飞行时各卫星适当分离; 二者具有相同的半长轴, 确保周期相同, 绕飞轨道闭合。

在飞行过程中各环绕卫星围绕参考卫星作周期性的相对运动, 它们具有相同的周期, 稳定的编队构型, 以及某种星间通信和信息耦合, 就像一颗大卫星一样共同完成某种航天任务。这样的一组分布式卫星(包括环绕卫星及实在参考卫星)组成的整体, 称为卫星簇, 也有人称之为网络星座。卫星簇的轨道运动特性与参考卫星相同, 不同的是它是一个平台很大(几百米至几十公里)的虚拟卫星。

本文应用航天器相对运动动力学 Hill 方程的解析解<sup>[1~3]</sup>, 研究了绕飞轨道的性质及编队卫星群的轨道设计。

## 1 基本假设、坐标系定义及转换关系

假设地球为均质圆球体, 不考虑轨道摄动, 则卫星的运动规律由二体解确定。假设参考卫星运行于圆轨道, 环绕卫星运行于近圆轨道。

定义两个坐标系, 如图 1 所示。定义地心赤道惯性坐标系  $O-XYZ$ : 原点在地心,  $OX$  轴在赤道面内指向春分点方向,  $OZ$  轴垂直于赤道面指向北极方向,  $OY$  轴由右手法则确定。定义相对坐标系  $o-xyz$ : 原点固定于参考卫星质心,  $oy$  轴自地心指向卫星质心天顶方向,  $oz$  轴指向卫星轨道面负法线方向,  $ox$  轴由右手法则确定。

\* 收稿日期: 2000-05-15  
基金项目: 国家 863 基金资助项目(863-2-5-2.4)  
作者简介: 张玉锬(1975-), 男, 博士生。

卫星在惯性坐标系中的运动可用六个轨道根数(轨道长半轴、偏心率、轨道倾角、近地点中心角、升交点赤经及真近点角)表示<sup>[3]</sup>, 设参考卫星和环绕卫星的轨道根数为 $(a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i, f_i)$ , 下标 $i$ 取0对应于参考卫星, 取1对应于环绕卫星, 则地心赤道惯性坐标系 $O-XYZ$ 到相对坐标系 $o-xyz$ 的转移矩阵为:

$$M_{EO} = M_z(-u_0)M_y(i_0 - 180^\circ)M_x(\Omega_0 - 90^\circ)$$

其中,  $u_i = \omega_i + f_i$  为纬度幅角,  $M_j(\theta)$  表示坐标系绕轴 $j$  旋转角 $\theta$  的初等转换矩阵。

若参考卫星和环绕卫星在惯性坐标系 $O-XYZ$  中的位置矢量 $R_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$  和速度矢量 $V_i = [\dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{Z}_i]^T$  已知, 则环绕卫星在相对坐标系 $o-xyz$  内的相对位置 $r = [x, y, z]^T$  和相对速度 $\dot{r}_i = [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]^T$  由下式可求:

$$\begin{aligned} r &= M_{EO} \cdot (R_1 - R_0) \\ \dot{r} &= M_{EO} \cdot [V_1 - V_0 - \omega \times (R_1 - R_0)] \end{aligned}$$

式中,  $\omega = \omega[\sin i_0 \sin \Omega_0, -\sin i_0 \cos \Omega_0, \cos i_0]^T$  为相对坐标系的角速度矢量,  $\omega$  是参考卫星的平均轨道角速度。

由如上关系, 给定 $R_0, V_0, r$  和 $\dot{r}$ , 可求得 $R_1$  和 $V_1$ 。

## 2 相对运动方程(Hill方程)

由前所述, 环绕卫星对参考卫星的相对运动可应用Hill方程(亦称Clohessey-Whiltshire方程)来描述为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\omega$  为参考卫星的平均轨道角速度。给定 $t=0$  时的初值 $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ , 便可得解析解<sup>[2]</sup>。经过分析, 相对运动为动椭圆, 可分解为轨道平面( $xy$  平面)和垂直于轨道平面( $z$  方向)的两个相互独立的运动: $xy$  平面内的相对运动轨迹为动椭圆,  $z$  方向为简谐振动。若初始条件满足:

$$x_0 = -\frac{2\dot{y}_0}{\omega} \text{ 及 } \dot{x}_0 = 2\omega y_0 \quad (2)$$

则相对运动为中心在参考卫星质心的椭圆, 形成绕飞轨道, 称式(2)为绕飞初始条件。此时, 初始条件只剩下四个自由变量: $y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0$ , 得式(1)的解:

$$\begin{cases} x = 2y_0 \sin(\omega t) - \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) \\ z = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin(\omega t) + z_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y_0\omega \cos(\omega t) + 2\dot{y}_0 \sin(\omega t) \\ \dot{y} = -y_0\omega \sin(\omega t) + \dot{y}_0 \cos(\omega t) \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \cos(\omega t) - z_0\omega \sin(\omega t) \end{cases} \quad (4)$$

绕飞轨道一般指初始运动状态满足式(2), 用式(3)描述的相对运动轨迹。下面对其进行深入剖析。

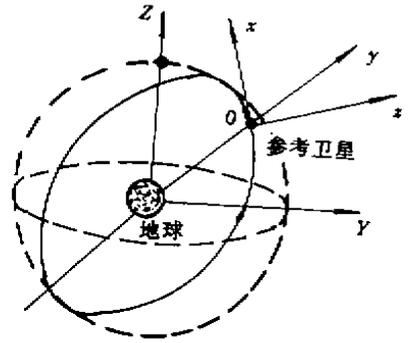


图1 坐标系示意图

Fig.1 Coordinate systems

### 3 绕飞轨道描述

式(3)描述的绕飞轨道为一空间曲线,可以从不同角度进行描述:其在各坐标平面内的投影,所在平面与各坐标平面的夹角,绕飞轨道根数。

#### 3.1 绕飞轨道的平面投影

任取式(3)中两个方程,消去参数  $t$ ,得绕飞轨道在各坐标平面内的投影方程为:

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D = 0 \tag{5}$$

式中,  $\xi, \eta$  表示所取两方程中的两变量,  $A, B, C, D$  为对应项的系数。依据文献[4]的条件,经验证各坐标平面投影均为中心在原点的椭圆(如图2所示)。由下式,可解得椭圆的长半轴为  $a$ ,短半轴为  $b$ ,长半轴与  $\xi$  轴的夹角  $\alpha$ :

$$a = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4s}}{2} \quad ; \quad b = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4s}}{2}$$

$$\sin(2\alpha) = -\frac{B}{a^2 - b^2} \quad ; \quad \cos(2\alpha) = \frac{C - A}{a^2 - b^2}$$

式中,  $s = \sqrt{-D}$ ,  $t = \sqrt{A + C + 2\sqrt{-D}}$ ,  $2\alpha \in [0, 2\pi]$

此处,一般椭圆包括两种特殊情况:a.圆( $a = b, \alpha = 0$ )b.闭合线段( $b = 0$ )。

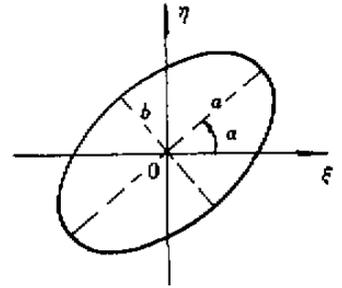


图2 一般椭圆

Fig.2 general ellipse

#### 3.2 绕飞轨道与坐标平面的夹角

由式(3),得绕飞轨道所在平面的方程:

$$n_1x + n_2y + n_3z = 0$$

其中,  $n_1 = \frac{y_0\dot{z}_0 - \dot{y}_0z_0}{2\omega}$ ,  $n_2 = y_0z_0 + \frac{\dot{y}_0\dot{z}_0}{\omega^2}$ ,  $n_3 = -y_0^2 - \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2$ 。由此,可得绕飞轨道平面与  $xy$  平面的夹角(环绕卫星轨道面的法矢量与  $xy$  平面法矢量的夹角)为:

$$\beta_{xy} = \arccos(n_0 \cdot n_{xy}), \quad \beta_{xy} \in [0, \pi]$$

其中,  $n_0 = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ ,  $n_{xy} = [0 \ 0 \ 1]^T$ 。

同理,可求出绕飞轨道与  $xz$  平面及与  $yz$  平面的夹角:

$$\beta_{xz} = \arccos(n_0 \cdot n_{xz}), \quad \beta_{yz} = \arccos(n_0 \cdot n_{yz})$$

式中,  $n_{xz} = [0 \ 1 \ 0]^T$ ,  $n_{yz} = [1 \ 0 \ 0]^T$ 。

#### 3.3 利用绕飞轨道根数进行空间描述

基于以上分析,绕飞轨道为一空间椭圆,中心在原点。类似经典轨道根数,可采用六个绕飞根数( $a_r, b_r, i_r, \omega_r, \Omega_r, f_r$ )描述绕飞轨道,如图3所示(图中参数均略去下标)。图中的参考平面为  $xy$  平面,升交点定义为环绕卫星的  $z$  坐标由负值变为正值的点。

绕飞根数定义如下: $a_r$  为绕飞轨道长半轴; $b_r$  为绕飞轨道短半轴; $i_r$  为绕飞轨道与参考平面(此处为  $xy$  平面)的夹角  $0^\circ \leq i_r < 180^\circ$ ; $\Omega_r$  为  $xy$  平面内由  $x$  轴沿逆时针方向到升交点的角距  $0^\circ \leq \Omega_r < 360^\circ$ ; $\omega_r$  为长轴幅角,即绕飞平面内由升交点起沿绕飞方向到较近的长半轴点(此点称为主长轴点)的夹角,取值范围为  $0^\circ \leq \omega_r < 180^\circ$ ; $f_r$  为真长轴角,即由主长轴点起,沿绕飞方向到环绕卫星的夹角。

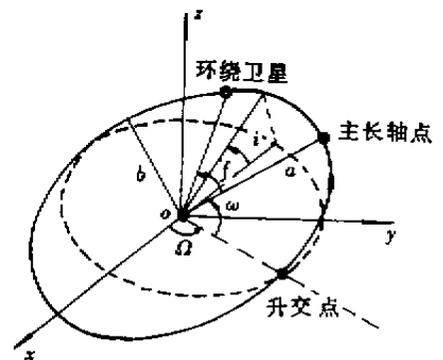


图3 绕飞轨道根数

Fig.3 Flying-around orbit elements

若给定环绕卫星的相对位置及速度,则可求得以上各绕飞轨道根数。鉴于篇幅所限,此处略去具体公式。

### 4 编队卫星群的轨道设计

编队卫星群轨道设计的任务是：给定初始时刻的参考卫星轨道根数及绕飞构型（包括绕飞轨道的描述和各环绕卫星在绕飞轨道上的绕飞相位），求出各环绕卫星的轨道根数。

#### 4.1 环绕卫星初始状态的确定

首先，引入基本环绕卫星的概念。如前所述，绕飞轨道上的环绕卫星满足绕飞初始条件，有四个独立初始状态参数  $y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0$ ，定义其中满足条件( $\dot{y}_0 = 0$  和  $y_0 < 0$ )的环绕卫星为基本环绕卫星。显然，绕飞轨道与基本环绕卫星一一对应，有三个自由度。这样，选择三个独立的绕飞轨道约束便可确定基本环绕卫星的三个独立初始状态参数  $y_0, z_0, \dot{z}_0$ 。

为确定任意环绕卫星的初始状态参数，以基本环绕卫星为参照，定义各环绕卫星的相位。定义初始时刻（取  $t_0 = 0$ ）基本环绕卫星的相位为  $0^\circ$ ，若绕飞轨道上某环绕卫星在  $t$  时刻位于基本环绕卫星当前的位置，且满足  $\omega t \in [0^\circ, 360^\circ)$ ，则该环绕卫星的相位为  $\varphi = \omega t$ 。这样，将某环绕卫星的相位代入式 (3) (4)，可得其初始运动状态。

#### 4.2 环绕卫星轨道参数的确定

环绕卫星的初始状态确定后，可通过坐标转换求得环绕卫星在惯性系内的位置矢量和速度矢量，进而便可确定环绕卫星的轨道参数，其流程如图 4 所示。

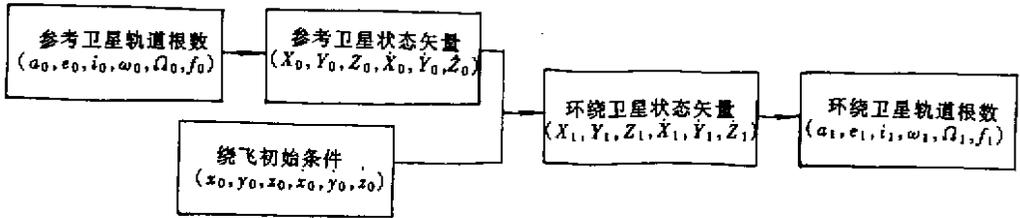


图 4 环绕卫星的轨道参数确定流程图

Fig.4 The flow chart to determine the orbit elements of surrounding satellites

### 5 算例与结论

假设参考卫星运行于半径为 7400 km 的圆轨道上，轨道倾角为  $30^\circ$ ，升交点赤经为  $100^\circ$ ，初始时刻的纬度幅角为  $90^\circ$ 。考虑由四颗环绕卫星组成的对地观测的编队卫星群，绕飞轨道在当地水平面内的投影为半径 1 km 的圆，初始时刻各卫星在  $xz$  平面投影上的相对位置如图 5 所示。

可以确定两组基本环绕卫星的初始状态：

(a)  $y_0 = -500$ (m),  $z_0 = -1000$ (m),  $\dot{z}_0 = 0$ (m/s)

(b)  $y_0 = -500$ (m),  $z_0 = 1000$ (m),  $\dot{z}_0 = 0$ (m/s)

即存在两个满足要求的绕飞轨道。按前述定义，分析初始状态 (a) 对应的绕飞轨道：其  $xy$  平面投影椭圆长半轴为 1 km，短半轴为 0.5 km，长轴在  $x$  轴上；其  $yz$  平面投影为一闭合线段，与  $y$  轴夹角为  $63.4^\circ$ ；绕飞轨道与三个坐标平面的夹角依次为  $116.6^\circ, 26.6^\circ$  和  $90^\circ$ ；绕飞轨道长半轴为 1.12 km，短半轴为 1 km，绕飞倾角为  $63.4^\circ$ ，升交点与  $x$  轴的角距为  $180^\circ$ ，长半轴幅角为  $90^\circ$ 。以初始状态 (a) 组数据为例，进行编队卫星群的轨道设计，结果如表 1 所示，绕飞构型在各坐标平面的投

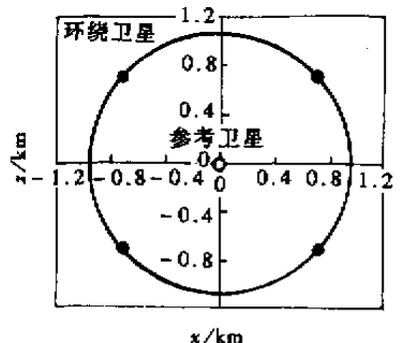


图 5  $xz$  平面上的相对位置

Fig.5 Relative position on  $xz$ -plane

影如图 6 所示。

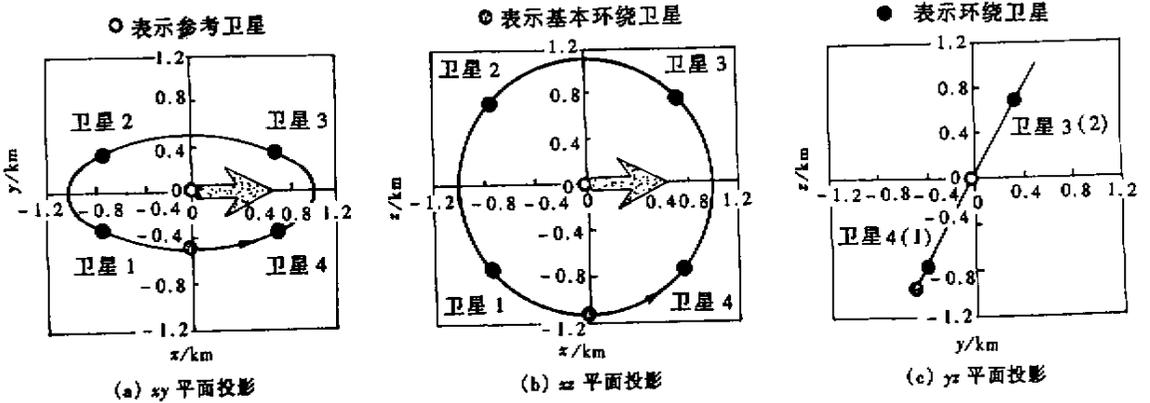


图 6 绕飞轨道平面投影图

Fig.6 The coordinate-plane projections of the flying-around orbit

表 1 各环绕星参数

Tab.1 Parameters of all surrounding satellites

	基本环绕星 0	环绕卫星 1	环绕卫星 2	环绕卫星 3	环绕卫星 4
$\varphi (^{\circ})$	0	45	135	225	315
$a$ (km)	7400.000101	7400.000203	7400.000203	7400.000203	7400.000203
$e$	0.000068	0.000068	0.000068	0.000068	0.000068
$i (^{\circ})$	30.007743	30.005476	29.994526	29.994526	30.005476
$\omega (^{\circ})$	90.000000	134.975465	224.975457	315.024543	45.024535
$\Omega (^{\circ})$	100.000000	100.010947	100.010953	99.989047	99.989053
$f (^{\circ})$	0.000000	315.009580	225.009582	134.990418	44.990420

综上所述，绕飞轨道与基本环绕卫星有三个自由度，环绕卫星有四个自由度。从 hill 方程的解析解出发，当参考卫星和环绕卫星的轨道根数给定后，可以对绕飞轨道进行完整准确的描述；当参考卫星轨道根数及绕飞构型给定后，可以进行编队卫星群的初步设计。

参考文献：

[1] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous [ J ]. J. Aerospace Sci , 1960 , 27 : 653 ~ 674.  
 [2] 林来兴. 空间交会对接技术 [ M ]. 北京：国防工业出版社，1995.  
 [3] 任董. 人造地球卫星轨道动力学 [ M ]. 长沙：国防科技大学出版社，1988.  
 [4] 董季兰. 实用数学手册 [ M ]. 石家庄：河北科学技术出版社，1988.



