

文章编号: 1001-2486 (2000) 06-0023-05

# 一类不确定大系统的分散变结构模型跟随控制\*

徐昕, 唐修俊, 贺汉根

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 针对一类具有不确定参数和外界扰动的非线性大系统, 在子系统互连项上界具有多项式形式的条件下, 提出了一种分散变结构模型跟随控制器设计方案。该控制器不需要未知参数变化、外界扰动以及子系统互连上界的先验信息, 能够通过自适应率对上述信息进行在线估计。在保证闭环大系统渐近稳定的条件下, 同时实现了各个子系统滑动模态的存在性和可达性。理论分析和仿真结果验证了本文所提方案的有效性。

**关键词:** 大系统; 不确定性; 分散控制; 变结构控制; 滑动模态

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Decentralized Variable Structure Model Following Control for a Class of Uncertain Large-Scale Systems

XU Xin, TANG Xiu-jun, HE Han-gen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A decentralized variable structure model following controller is designed for a class of uncertain nonlinear large-scale systems with interconnections whose upper bounds have the form of polynomials. Without a priori knowledge of the upper bounds of unknown parameters, interconnections between subsystems and external disturbances, the stability of the closed-loop large-scale system is guaranteed by adaptive laws. Furthermore, the sliding mode of each subsystem exists and is reachable. Theoretical analysis and simulation results show the effectiveness of the controller.

**Key words:** large-scale system; uncertainty; decentralized control; variable structure control; sliding mode

大系统是由多个子系统互连构成的复杂系统。在大系统的控制方法中, 分散控制是一种较普遍的方式。目前, 对于确定性大系统的分散控制方法研究已有许多成果<sup>[1]</sup>。然而在实际系统中广泛存在的不确定性限制了上述方法的应用和推广。针对不确定大系统的分散鲁棒控制已提出了若干方法, 如分散自适应模糊控制<sup>[2]</sup>、分散  $H^\infty$  控制<sup>[3]</sup>、分散模糊变结构控制<sup>[4]</sup>等。但已有的方法往往要求已知子系统互连和外界扰动的上界信息。

在实际工程应用中, 系统不确定性和外界扰动上界的信息往往难以精确地获得, 对上述信息的保守估计将会导致系统性能变差。如何在系统不确定性和外界扰动上界未知的条件下进行鲁棒控制器设计, 在理论与应用上都有重要的意义。

本文针对一类在机器人控制、电机伺服控制等实际工程中具有应用背景的非线性大系统为研究对象, 提出了一种分散变结构模型跟随控制器的设计方法。该类大系统的特点是子系统互连项的上界具有状态变量的多项式形式。本文设计的分散变结构控制器不要求系统参数变化、子系统互连和外界扰动的上界等先验信息, 能够通过自适应率来对系统不确定性和扰动上界进行估计, 在保证闭环大系统渐近稳定的条件下, 同时保证各个子系统滑动模态的存在性和可达性。理论分析和仿真结果验证了本文所提方案的有效性。

\* 收稿日期: 2000-06-20  
基金项目: 国家“863”智能机器人项目(863-512-9803-02)  
作者简介: 徐昕(1974-), 男, 博士生。

## 1 控制问题描述

设大系统  $\Sigma$  由  $m$  个子系统构成, 子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 具有如下的模型

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = x_{i3} \\ \dots \\ \dot{x}_{in} = a_i x_{in} + f_i(x_i, t) + g_i(x, t) + b_i u_i(t) + d_i(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T$  为子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的状态向量,  $a_i$  为未知的参数,  $b_i$  为未知的控制增益,  $f_i(x_i, t)$  为已知的子系统  $i$  的非线性特性,  $g_i(x, t)$  为其它子系统对子系统  $i$  的关联作用,  $u_i$  为子系统  $i$  的控制输入,  $d_i(x, t)$  为子系统  $i$  受到的外界扰动。

控制目标是在给定各个子系统的期望状态轨迹  $x_{di} = (x_{di1}, x_{di2}, \dots, x_{din})^T$  的条件下, 设计分散控制律  $u_i(t)$ , 使得所有子系统的状态跟踪期望轨迹的误差收敛到零的一个邻域内。

在进行分散变结构控制器设计之前, 对系统 (1) 作出如下假设:

(1)  $a_i, b_i$  为常数或缓变参数, 其中  $b_i \gg \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为一已知的正数;

(2)  $|g_i(x, t)| \leq \sum_{j=1}^m G_{ij} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_j\|_k$ , 其中  $p$  为已知正整数,  $G_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m$ )

为未知正常数, 且  $F_i = \sum_{j=1}^m G_{ij}$ , 范数  $\|\cdot\|_k$  定义为:  $\|x_i\|_k = (\sum_{j=1}^n |x_{ij}|^k)^{\frac{1}{k}}$ ;

(3)  $|d_i(x, t)| \leq D_i$ ,  $D_i$  为未知正常数。

## 2 分散变结构模型跟随控制器设计

对上述大系统  $\Sigma$ , 为每个子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 分别设计参考模型  $R_i$ ,  $R_i$  具有如下的形式:

$$R_i \begin{cases} \dot{\bar{x}}_{i1} = \bar{x}_{i2} \\ \dot{\bar{x}}_{i2} = \bar{x}_{i3} \\ \dots \\ \dot{\bar{x}}_{in} = a_{im} \bar{x}_{in} + b_{im} r_i(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $a_{im} < 0, b_{im} > 0$ , 可以根据对系统性能的要求来确定。

对子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 定义模型跟随误差为:  $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})^T$ , 其中  $e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), 设子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的滑模控制切换平面为  $s_i$ ,  $s_i$  具有如下的形式:

$$s_i = e_{in} + c_{i(n-1)} e_{i(n-1)} + \dots + c_{i1} e_{i1} = 0 \quad (3)$$

其中, 由系统  $c_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) 决定的多项式  $s^n + c_{i(n-1)} s^{n-1} + \dots + c_{i1}$  为 Hurwitz 多项式。

设  $\hat{a}_i, \hat{b}_i$  为系统未知参数的估计,  $\hat{D}_i$  为外界扰动上界的估计,  $\hat{F}_i$  为子系统互连上界的估计。大系统的分散变结构模型跟随控制器具有如下的表达式:

$$u_i(t) = u_{i1}(t) + u_{i2}(t) + u_{i3}(t) \quad (4)$$

其中,

$$u_{i1}(t) = \begin{cases} \hat{b}_i^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} e_{i(j+1)} - a_{im} e_{in} + a_{im} x_{in} - f_i(x_i, t) + b_{im} r_i(t) - \hat{a}_i x_{in} \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(s_i) \cdot (\hat{D}_i + \hat{F}_i \cdot (\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k + m(M_i + C_i))) \right] & \hat{b}_i \neq 0 \\ 0 & \hat{b}_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$u_{i2}(t) = -\operatorname{sgn}(s_i) \cdot \phi_i \cdot k_{0i} \cdot |\hat{b}_i^{-1}| \cdot \left[ \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} e_{i(j+1)} + |a_{im} \bar{x}_{in}| + |\hat{a}_i x_{in}| + |f_i| \right]$$

$$+ |\hat{D}_i| + |\hat{F}_i| (m(C_i + C_i) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k) + b_{im} |r_i| ] \\ - \text{sgn}(s_i) \cdot \phi_i \cdot k_{0i} (1 + |x_{in}| + m(C_i + C_i)) \quad (6)$$

$$u_{i3}(t) = -k_{1i} \cdot \text{sgn}(s_i) - k_{2i} s_i \quad (7)$$

式(5)(6)(7)中  $\phi_i$ 、 $k_{1i}$  和  $k_{2i}$  为正常数。参数估计  $\hat{a}_i$ 、 $\hat{b}_i$ 、 $\hat{D}_i$  和  $\hat{F}_i$  的自适应调节律为：

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_i = s_i x_{in} \\ \dot{\hat{b}}_i = s_i u_{i1} \\ \dot{\hat{D}}_i = |s_i| \\ \dot{\hat{F}}_i = |s_i| \cdot \left( \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k + m(C_i + C_i) \right) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $C_i$  为正常数， $M_i$  为参考模型状态向量在范数  $\|\cdot\|_k$  意义下的上界，即：

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|\bar{x}_i\|_k \leq M_i \quad (9)$$

参数  $k_{0i}$  由下式决定：

$$k_{0i} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{\epsilon_i}, \frac{1}{\hat{b}_i - \phi_i} \right\}, & \hat{b}_i > \phi_i \\ \frac{1}{\epsilon_i}, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

### 3 稳定性和收敛性分析

利用 Lyapunov 稳定性理论，对上述大系统的分散变结构模型跟随控制进行稳定性分析，得到如下的结论：

**定理 3.1** 对于  $m$  个子系统构成的非线性大系统  $\Sigma$ ，其子系统的模型由式(1)给出，并满足假设(1)(2)和(3)，采用分散变结构模型跟随控制(4)(5)(6)(7)，参数自适应律由(8)决定，则各个闭环子系统渐近稳定，大系统的所有信号有界，且各个子系统的滑动模态可达。

**证明：**(1)闭环系统稳定性的证明。

对子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )，构造如下的 Lyapunov 函数：

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} (\hat{a}_i - a_i)^2 + \frac{1}{2} (\hat{b}_i - b_i)^2 + \frac{1}{2} (\hat{D}_i - D_i)^2 + \frac{1}{2} (\hat{F}_i - F_i)^2 \quad (11)$$

则整个大系统的 Lyapunov 函数为：

$$V = \sum_{i=1}^m V_i \quad (12)$$

对  $V_i$  求导可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_i \dot{s}_i + \dot{\hat{a}}_i - a_i \cdot \hat{a}_i + (\hat{b}_i - b_i) \cdot \dot{\hat{b}}_i + (\hat{D}_i - D_i) \cdot \dot{\hat{D}}_i + (\hat{F}_i - F_i) \cdot \dot{\hat{F}}_i \\ &\leq s_i d_i(x_i, t) - D_i |s_i| - b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2 + \text{sgn}(x_i, t) - F_i |s_i| \cdot \left( \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k + m(C_i + M_i) \right) \\ &\leq -b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2 + s_i g_i(x_i, t) - F_i |s_i| \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^m \dot{V}_i \leq \sum_{i=1}^m \left[ s_i g_i(x_i, t) - F_i |s_i| \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k - b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2 \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^m |s_i g_i(x_i, t)| - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m G_{ij} |s_i| \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k + \sum_{i=1}^m [-b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2] \\ &\leq \sum_{i=1}^m -b_i k_{i2} s_i^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

易证子系统切换平面渐近收敛到0,因而状态跟踪误差也渐近收敛到0。

(2) 子系统滑动模态存在性的证明:

根据系统状态的渐近收敛性可得,存在  $T_1 > 0$ , 当  $t > T_1$  时, 对所有子系统  $i$  有:

$$\|x_i\|_k - \|\bar{x}_i\|_k \leq \|e_i\|_k = \|x_i - \bar{x}_i\|_k \leq C_i \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p) \quad (15)$$

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|x_i\|_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \|\bar{x}_i\|_k + C_i \leq M_i + C_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq s_i d(x_i, t) - D_i |s_i| - b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2 + s g(x, t) - F_i m (M_i + C_i) |s_i| \\ &\leq -b_i k_{i1} |s_i| - b_i k_{i2} s_i^2 \end{aligned} \quad (17)$$

则有  $\dot{V}_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 所以存在  $T_2 > 0$ , 当  $t > T_1 + T_2$  时, 有:

$$V_i \leq \frac{\phi_i^2}{2} \quad (18)$$

$$|a_i - \hat{a}_i| \leq \phi_i, |b_i - \hat{b}_i| \leq \phi_i, |\hat{D}_i - D_i| \leq \phi_i, |\hat{F}_i - F_i| \leq \phi_i \quad (19)$$

又

$$s_i \cdot \dot{s}_i = s_i \left[ \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} e_{(j+1)} + a_{im} e_{in} + (a_i - a_{im}) x_{in} + f_i + g(x, t) + d(x_i, t) + b_i u_i(t) - b_{im} r_i \right] \quad (20)$$

由(19)式可得:

$$|1 - b_i \hat{b}_i^{-1}| = |\hat{b}_i^{-1}| |\hat{b}_i - b_i| \leq \phi_i \cdot |\hat{b}_i^{-1}| \quad (21)$$

又由(10)(19)和假设(1), 易知:

$$b_i k_{0i} \geq 1 \quad (22)$$

将不等式(21)(22)代入(20)式, 有:

$$\begin{aligned} s_i \dot{s}_i &\leq s_i (a_i - \hat{a}_i) x_{in} + (1 - b_i \hat{b}_i^{-1}) s_i \hat{a}_i x_{in} + |s_i| (D_i - \hat{D}_i) + |s_i| \cdot \hat{D}_i \cdot (1 - b_i \hat{b}_i^{-1}) - \\ &\quad b_i k_{0i} \phi_i \cdot |s_i| \cdot |\hat{b}_i^{-1}| \cdot [|\hat{a}_i x_{in}| + |\hat{D}_i|] - b_i k_{0i} \phi_i \cdot |s_i| (1 + |x_{in}|) - b_i [k_{1i} |s_i| + k_{2i} s_i^2] \\ &\quad + |s_i| (F_i - \hat{F}_i) m (M_i + C_i) + (1 - b_i \hat{b}_i^{-1}) |s_i| \hat{F}_i m (M_i + C_i) - b_i k_{0i} \phi_i |s_i| \hat{F}_i m (M_i + C_i) \\ &\leq |s_i| \cdot \phi_i \cdot |x_{in}| + |s_i| \cdot \phi_i m (M_i + C_i) - b_i k_{0i} \phi_i \cdot |s_i| (1 + |x_{in}| + m (M_i + C_i)) \\ &\quad - b_i [k_{1i} |s_i| + k_{2i} s_i^2] \\ &\leq -b_i [k_{1i} |s_i| + k_{2i} s_i^2] \end{aligned} \quad (23)$$

所以经过有限时间  $T_1 + T_2$ , 子系统  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的滑动模态存在且可达。[证毕]

## 4 仿真研究

考虑如下的由两个子系统构成的不确定非线性大系统:

$$\text{I.} \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = x_{12} + (x_{11}^2 - 1.5x_{12}^3) + (x_{21}^2 - 1.5x_{22}^2 - 0.3x_{22}) + 3u_1 + 3\sin(t) \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{II.} \begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = -3x_{22} + (2.5x_{21} + 3x_{22}^3) + (2x_{11}^2 - 0.5x_{12}^2 + 0.2x_{11}) + u_2 + 2\cos(t) \end{cases} \quad (25)$$

其中,  $f_1(x_1) = x_{11}^2 - 1.5x_{12}^3$  和  $f_2(x_2) = 2.5x_{21} + 3x_{22}^3$  分别为子系统 I 和 II 的已知非线性特性,  $g_1(x) = x_{21}^2 - 1.5x_{22}^2 - 0.3x_{22}$  和  $g_2(x) = 2x_{11}^2 - 0.5x_{12}^2 + 0.2x_{11}$  为子系统之间的互连项。  $d_1(x, t) = 3\sin(t)$  和  $d_2(x, t) = 2\cos(t)$  分别为子系统 I 和 II 的未知外界扰动。

大系统的互连项为二次多项式,  $p = 2$ 。子系统的初始状态为:  $x_1(0) = x_2(0) = (0, 0)^T$ , 控制目标是使两个子系统的状态向量跟踪给定的轨迹  $x_{d1} = x_{d2} = (-\cos t, \sin t)^T$ 。采用本文提出的分散变结构模型跟随控制方案, 两个子系统的参考模型分别设计为:

$$M1: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_{11} = \bar{x}_{12} \\ \dot{\bar{x}}_{12} = -3\bar{x}_{12} + 2r_1 \end{cases} \quad M2: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_{21} = \bar{x}_{22} \\ \dot{\bar{x}}_{22} = -5\bar{x}_{22} + 3r_2 \end{cases} \quad (26)$$

模型跟随误差定义为： $e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{ij}$ ， $(i, j = 1, 2)$ 。各个子系统的滑动模态设计为： $s_1 = e_{12} + 2e_{11} = 0$ ， $s_2 = e_{22} + e_{11} = 0$ 。需要说明的是，在实际应用中，为避免滑模控制产生的抖动现象，通常采用一种边界层控制方法<sup>[5]</sup>，即利用饱和函数  $\text{sat}(\cdot)$  代替符号函数  $\text{sgn}(\cdot)$ 。

控制器的参数选择为： $\phi_1 = 0.2$ ， $\phi_2 = 0.2$ ， $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0.05$ ， $\epsilon = 0.8$ ， $M_1 = 2$ ， $k_\delta = 1$ ， $M_2 = 2$ ， $C_1 = C_2 = 0.1$ 。图1和图2分别显示了子系统 I 和 II 的轨迹跟踪误差。

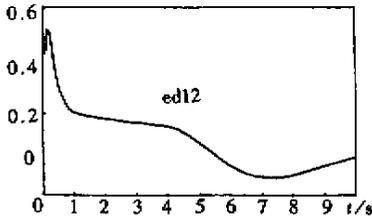


图1 子系统1的轨迹跟踪误差曲线

Fig.1 Tracking error of subsystem1

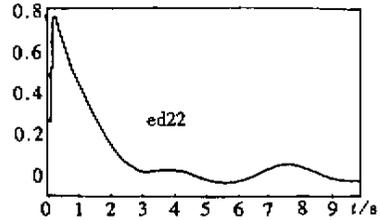


图2 子系统2的轨迹跟踪误差曲线

Fig.2 Tracking error of subsystem2

## 5 结论

本文针对一类具有多项式互连项的非线性不确定大系统，提出了分散变结构模型跟随控制器设计方法。该方法对系统不确定性的先验信息要求较少，且具有鲁棒性好、工程上易实现的特点。本文的研究结果已成功地用于轮式移动机器人的轨迹跟踪控制器的设计中。

## 参考文献：

- [1] Siljak, D D. Decentralized Control of Complex Systems [M]. Academic Press, San Diego, 1991.
- [2] 张天平, 冯纯伯. 非线性大系统的分散自适应模糊控制 [J]. 控制理论与应用, 13(5): 559-566.
- [3] Yang G H, Zhang S Y and Lam J. Decentralized  $H^\infty$  Control for Composite System [J]. Control Theory and Application, 1996, 13(6): 729-737.
- [4] 王涛等. 一类大系统的直接自适应分散模糊控制 [J]. 信息与控制, 1999. 28(4): 362-367.
- [5] 高为炳, 变结构控制理论基础 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.

