

文章编号: 1001-2486 (2000) 06-0038-09

ENO 格式应用分析*

侯中喜, 梁剑寒, 王承尧

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 对一类高阶、高分辨率的 ENO 格式进行了较为详细的讨论。通过一些典型算例的应用和同常用 TVD 类型格式的比较, 说明了在计算中采用高阶格式分辨复杂流动结构的优越性。在对格式应用分析的基础上, 指出了格式应用中需注意的问题。通过定量分析说明, 高阶 ENO 格式在计算中, 不但能够减少网格规模, 而且能够明显提高计算物理量, 特别是其导数的计算精度。

关键词: 高阶格式; 高分辨率; ENO; TVD

中图分类号: V211.1 **文献标识码:** A

The Application Analysis of ENO Schemes

HOU Zhong-xi, LIANG Jian-han, WANG Chen-yao

(College of Aerospace and Material Engineering National Univ. of Defense Technology, Changsha, 410073)

Abstract: A class of high order and high resolution ENO schemes is carefully studied and analyzed. Through using ENO schemes to calculate some model problems and comparing the results with common TVD scheme, it shows the advantages of high order schemes in calculating complex flow problems. Through analyzing the results and problems in calculation, some cautions are given. It also shows that high order ENO schemes can not only decrease the magnitude of mesh, but also improve the accuracy of parameter and its ' derivative in calculation.

Key words: high order; high resolution; ENO; TVD

现代计算流体力学所处理的问题范围越来越广, 流动特征越来越复杂, 其中一些问题的合理、正确的模拟对计算格式提出了较高的要求, 如在超声速复杂流场分析中, 所涉及的流动经常存在有涡旋、激波、接触间断、弱间断以及分离、再附等多种物理现象, 同时由于粘性扩散和对流运输等多种因素的作用, 各种流动现象又存在有不同的结构尺度, 如何合理、精确地分析和分辨非定常、非光滑、多尺度流场一直是困扰流体力学工作者的重要问题。

对于光滑流动区域复杂流动现象的分析如下: 由于广泛存在着像粘性等影响而产生的小尺度流动结构, 网格的表现力和相应离散误差严重影响计算结果, 特别是在一些需要计及流动参数导数或高阶导数的问题, 因此计算中需要依据精度要求对网格尺度提出一定的限制。受目前计算机内存容量和计算速度的制约, 网格尺度可能变化的范围也是有一定限度的, 为此, 需要在格式处理方面提高网格的表现力并减小截断误差。现今普遍认为, 采用高阶格式, 不但可以降低对网格规模的苛刻要求, 而且能够正确分辨其中复杂的流动现象^{[7][9][11][12]}。

对于间断现象的分析如下: 由于间断属于非光滑结构, 微分形式的方程在这里不能使用, 仅能求得满足积分关系的弱解, 所以应用的数值格式需要特殊处理, 它要求: 对于间断不但要具有较高的分辨率, 而且在间断前后应满足间断关系式。若采用固定插值模板的方法计算, 则会在间断附近出现解的非物理振荡现象, 并且随网格的改进也不能使这种现象消失, 在实际计算中, 它不但影响解的精度而且经常导致求解过程波动甚至发散。在以前, 消除和减小这种伪振荡的方法主要有两大类: 一是在格式中直接加入人工粘性, 但这种方法需要手工调节参数; 另一类方法是应用限制器来抑制振荡, 这种方法实质上是在间断区降低格式精度, 在一维问题中通过精心构造限制器能够得到具有 TVD (Total Variation Diminishing) 性质的格式。目前较为常用的就是这类格式, 然而由于构造上的特点使得格式在光滑区一般有二阶精度, 在极值处仅具有一阶精度, 应用这种方法在包含有复杂光滑结构的流场中, 势必会影响解的精度。

ENO (Essentially Non-Oscillatory) 格式是由 Harten 等人在 1987 年的一篇经典文献中引入的^[1]。ENO 格式的提出对于当前的计算现状有不小的影响, 其基本设计思想是构造一类具有高阶、高分辨率的格式。近几年, 其理论的发展和一些实践算例表明: ENO 方法在光滑区具有较高阶的阶数, 在间断前后基本无振荡, 并对间断有较高的分辨率。格式在

* 收稿日期: 2000-04-10
基金项目: 国家部委项目资助
作者简介: 侯中喜 (1973-), 男, 博士生。

不同网格系统下也有较好的稳定性，特别适合于计算包含各类间断和含多种复杂流动光滑结构以及二者相互作用的流场。

ENO 格式自提出以来已有了长足的发展。截止到 1997 年，ISI 的数据统计结果显示，其已被引用了 144 次；在 1997 年 JCP (Journal of Computational Physics 计算物理杂志) 30 周年庆典时，JCP 又将原先的经典文献原文重新刊印，以引起研究者的重视和推广其应用。1998 年 9 月，由 NATO 的研究和技术中心、Van Karman 实验室和 NASA 的航空数值模拟部联合召开了三次名为“计算流体力学中的高阶离散方法”的会议，在 1999 年由 Springer 公司出版的论文集序中，强调高精度计算方法是 CFD 中一个具有挑战性的领域，会议精选的 5 篇文章中有 3 篇是关于 ENO/WENO 算法的。在国内 ENO 格式的研究起步较晚工作较少。

本文仔细介绍了一类 ENO 格式的构造思想，由于 ENO 格式本身属于非线性格式（即使对于线性问题由于模板的自适应选择，计算也可能是非线性的），完全的理论分析和证明十分困难，只能对简单的情况给出基本性质（格式截断误差的阶数和总变差的变化）的分析和说明。为此，本文通过同常用 TVD 格式的计算对比分析以及算例分析说明 ENO 格式所具有的性质，并从应用的角度分析了格式需要注意的一些问题。在程序设计中结合格式的相似构造方法，实现了格式阶数可变的一维、二维和三维计算程序。

1 ENO 格式概要

ENO 格式包含平均、重构和模板自适应选择三个重要的设计思想。平均较为简单是指在一个区间内物理量的平均。下面就重构和模板的自适应选择予以介绍。

1.1 重构的思想

重构就是在已知函数分段平均值的情况下，构造满足一定精度下的原函数分布，这里以一维均匀网格为例介绍重构的基本思想。

在计算区域 $[a, b]$ 之间划分网格：定义单元

$$I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$$

已知一函数 $u(x)$ 在区域 $[a, b]$ 中分段单元上的平均值 \bar{u}_i

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi) d\xi \quad i = 1, 2, \dots, n$$

需要构造一近似多项式 $p_i(x)$ ，在单元 I_i 中逼近 $u(x)$ 有 k 阶精度：

$$p_i(x) = u(x) + O(\Delta x^k) \quad x \in I_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

特别是（上标减号代表点的左极限，加号代表点的右极限）：

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad u_{i-\frac{1}{2}}^+ = p_i(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k), \quad u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

具体的重构方法可以选择多项式插值、三角函数插值、正交函数逼近等方法。

1.2 模板的自适应选择：

在计算中为了避免跨越间断插值引起数值振荡，需要在计算中自适应地选择模板，即取“最光滑”的模板。这里“模板”指所选的重构点区域。

首先定义差商： $u[x_{i-\frac{1}{2}}] = u(x_{i-\frac{1}{2}})$

$$u[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] = \frac{u[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] - u[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{3}{2}}]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}$$

在差分分析中易知，差商有如下性质：

$$\text{在光滑区域 } u[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] = \frac{u^{(j)}(\xi)}{j!}, \text{ 在间断区域 } u[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] = O\left(\frac{1}{\Delta x^j}\right)$$

因此可以利用差商作为判断准则来选择在计算点周围“最光滑”的模板。

1.3 ENO 的基本计算方法

有了前面介绍的平均、重构和模板选择的的思想，以一维守恒问题 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 的初值问题为例，介绍 ENO 的基本计算步骤。

(1) 空间数值通量的计算方法：

守恒性质的差分问题：如给定一函数 $f(x)$ 的点值 $f(x_i)$ ，可以引入重构的思想来构造计算的数值方法，直接

在单元点 x_i 处采用守恒差分近似：

$$\frac{du(x,t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i}(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}})$$

式中 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}(u_{i-r}, \dots, u_{i+s})$ ，且要求 $\frac{1}{\Delta x_i}(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}) = f'(x_i) + O(\Delta x)^k$ 。

可设 $f(x) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{i-\frac{\Delta X}{2}}^{i+\frac{\Delta X}{2}} h(\xi) d\xi = \bar{h}(\xi)$ ，可以看出 $f(x)$ 是 $h(\xi)$ 在区间上的平均值。

$$\text{则有：} f'(x) = \frac{1}{\Delta x_i} \left[h\left(x + \frac{\Delta X}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta X}{2}\right) \right]$$

因而可取 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k)$ ，式中 $h(\xi)$ 可以采用前面介绍的已知函数平均值构造区域内函数值的方法进行计算。

(2) 时间方面的处理

时间项的处理可以采用具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法，如对于时间为 m 阶的格式，有： $u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(k)})) \quad i = 1, \dots, m$

初始时 $u^{(0)} = u^n$ ，计算一个时间步结束时， $u^{(m)} = u^{n+1}$ 。

2 ENO 格式的应用及性质分析

ENO 格式是一种典型的非线性算法。即使对于线性方程，由于模板的自由选择，其计算过程也会因参量的不同分布而变化，因而选点的随意性为格式性质的理论分析带来了较大的困难，目前只能在简单的情况下证明 ENO 格式具有总变差基本无振荡的特性。本文结合一些能够求出精确解或具有典型性质的问题，通过计算并与现今常用的方法进行了对比，考察 ENO 的特性和实际计算效果。另外，就格式在一些特殊情况下的计算，通过分析指出了应注意的问题，为其进一步的推广应用打好基础。

2.1 典型算例应用

(1) 一维标量方程：

求解方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的初值问题，式中 a 为常数。

此算例可以求出精确解，用于考察格式在包含光滑、间断以及局部极值等结构问题中的应用效果，并将计算结果同二阶 TVD 类型的格式进行比较。精确解为： $u(x, t) = u(x - at, t_0)$

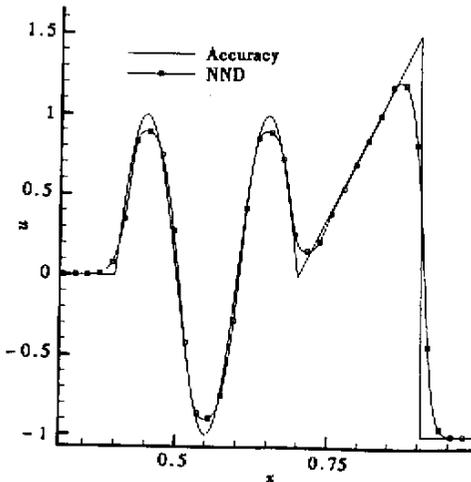


图1 NND 计算结果同精确值的比较

Fig.1 NND 's result compared with accuracy

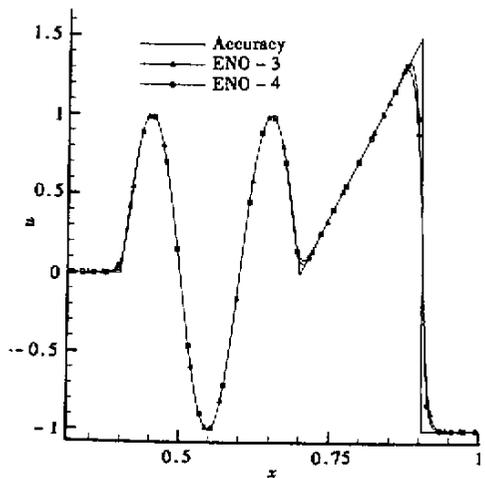


图2 三阶、四阶 ENO 格式计算同精确值的比较

Fig.2 3 order, 4 order ENO ' result compared with accuracy

图1、图2给出了不同格式在 CFL 数为 0.6，计算时间为 1 s 的计算结果。从图中可以看出：高阶 ENO 格式的计算结果要好于二阶 NND 格式，文中 NND 格式指文献 (10) 中指的 NND-5。在局部极值处，NND 格式因为降阶的影响在正弦

函数的极值处误差较大，而相应的 ENO-3，ENO-4（分别代表三阶和四阶格式）在极值处能够很好的同精确解相吻合；在间断处，ENO-3、ENO-4 要明显地比 NND 对间断的分辨清晰，相应的 ENO-4 比 ENO-3 又有一定的改善。ENO 格式的整个计算结果没有可以观察到的振荡。

(2) 一维 EULER 方程：

控制方程是一个守恒律方程组。这里分析在不同初始间断的情况下间断的分解问题，即所谓的 Riemann 问题。计算选用了经典 Lax 问题，它是一个包含膨胀波、接触间断和激波的一维 Euler 问题，其包括了流体力学一些典型的流动结构，并且可以求出精确解。用来考察格式对这些典型结构的分辨效果。计算条件：CFL = 0.6；Lax 问题的初始间断分布： $(\rho = 0.445, u = 0.698, p = 3.528)$ ， $(\rho = 0.5, u = 0.0, p = 0.571)$ 。

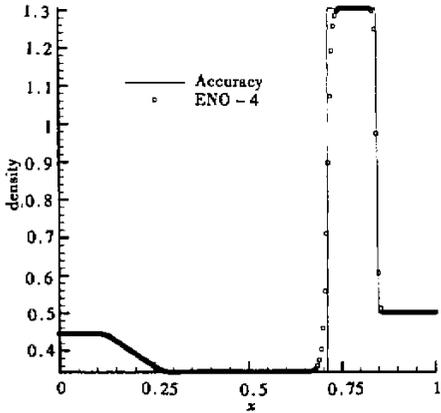


图3 Lax 问题 $t = 0.14$ 密度分布
Fig.3 Lax problem $t = 0.14$ density

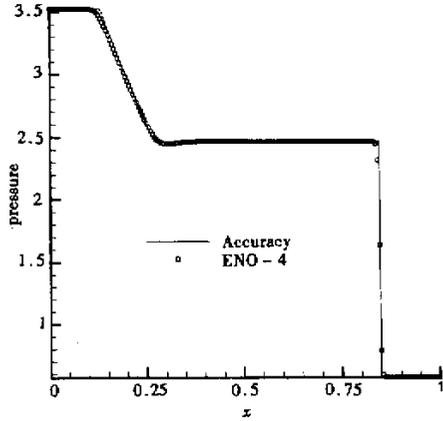


图4 Lax 问题 $t = 0.14$ 压力分布
Fig.4 Lax problem $t = 0.14$ pressure

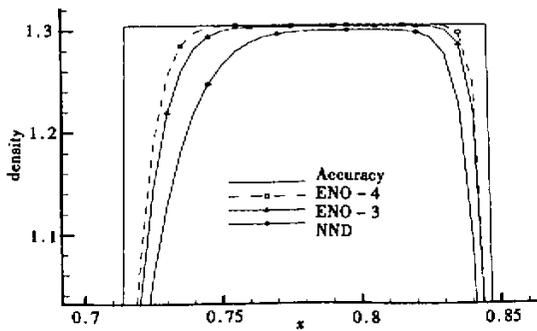


图5 Lax 问题 $t = 0.14$ 密度分布（间断附近局部区域格式对比）
Fig.5 Lax problem $t = 0.14$ density (different scheme comparing at part of discontinuous)

图 3、图 4 给出了计算的密度和压力分布。从图中可以看出：ENO 格式对膨胀波、接触间断和激波都具有更良好的分辨能力，并且计算结果稳定；在激波处基本上仅跨 3 个点，分辨率较高；在接触间断处过渡区还是有些大，这个问题可以采用子网格分辨和人工压缩方法改进，有兴趣的可以参考文献 [4]。从图 5 不同格式在接触间断和激波间断局部区域的比较可以看出，ENO 格式的分辨效果要好于 NND 格式，而且接触间断后波的强度不变，另外 4 阶 ENO 的计算结果略好于 3 阶 ENO，这同 ENO 性质分析是一致的。

(3) 二维平板激波反射

控制方程为二维 Euler 方程。问题为：一入射激波射入马赫数为 2 的均匀平板流动，激波打在平板上并反射，这

里假设平板为无粘。问题中激波的反射角可以采用激波关系式计算出来。计算条件：激波的入射角为 $\theta = 32.585$ 度，激波入射到平板上的位置为 0.19 处，计算域选为 $0.0 \leq x \leq 0.3, 0.0 \leq y \leq 0.1$ ，计算中取网格为均匀，网格数为 120×40 。

图 6、图 7 分别给出了 NND 格式、3 阶 ENO 格式的计算结果。两种方法都给出了正确的激波反射现象和准确的反射角；但 3 阶 ENO 格式对激波间断的分辨率较 NND 格式有较大的改进，激波宽度明显减小，激波分辨得更清晰；ENO 格式的计算结果在激波附近无明显的波动。

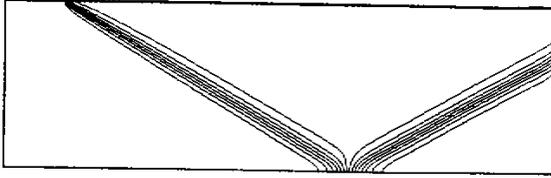


图 6 二维平板激波反射压力等值线 (NND 格式)

Fig.6 2D plane shock reflect problem, pressure contour (NND scheme)

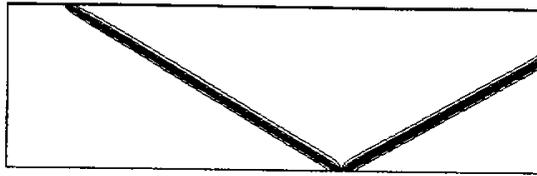


图 7 二维平板激波反射压力等值线 (ENO-3 格式)

Fig.7 2D plane shock reflect problem, pressure contour (ENO-3 scheme)

(4) 二维前台阶问题

基本问题是：一个长为 3 个单位，高为 1 个单位的通道中放有一台阶，其高为 0.2 个单位，位于通道入口的 0.6 个单位处，通道入口是马赫数为 3 的均匀流动。初始值为整体马赫 3 的流动。这个算例主要考察格式在非定常复杂流动结构计算中的性能。计算中 $CFL = 0.6$ ，取时间等于 4 的计算结果。

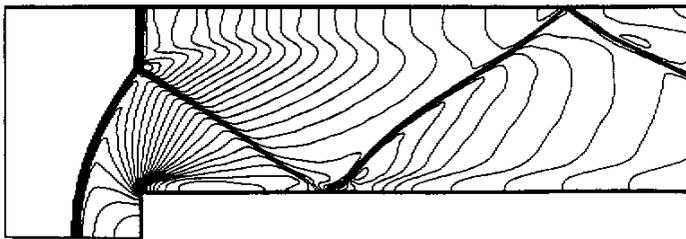


图 8 前台阶问题 $t = 4$ 时 ENO-3 格式计算的密度等值线图

Fig.8 Front step problem, $t = 4$, density contour (ENO-3 scheme)

图 8 给出了 4 s 对应的密度分布图，结果同文献 [9] 中结果一致。从图中可以看出，3 阶 ENO 格式给出了清晰的波系生成、反射和接触上间断的图像。这说明 ENO 格式能够很好的分析和分辨流场中复杂的波系结构。

(5) 三维激波平板反射

控制方程为三维 Euler 方程。问题为：有一入射激波射入马赫数为 2 的均匀平板，激波打在平板上并反射，这里假设平板为无粘的。问题中激波的反射角可以采用激波关系式计算出来。计算条件：激波沿 Z 方向射入，且同 X 方向的夹角为 $\theta = 32.585$ 度，激波入射到平板上的位置 $x = 0.19, y = 0$ 处，计算域选为 $0.0 \leq x \leq 0.3, 0.0 \leq y \leq 0.1$ 。

图 9、图 10 给出了 NND 格式、3 阶 ENO 格式的计算结果。计算结果都给出了正确的激波反射现象和准确的激波反射角；ENO 格式对三维激波间断的分辨率较 NND 格式有了明显的改进，激波分辨更清晰；ENO 格式的计算结果在激波附近无明显的波动。

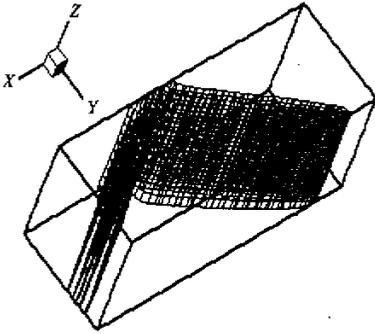


图 9 三维无粘平板激波反射压力 (NND 格式)

Fig.9 3D plane shock reflect problem (no viscous), pressure contour (NND scheme)

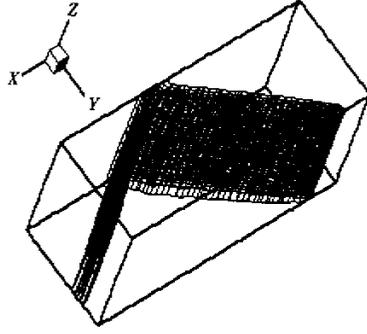


图 10 三维无粘平板激波反射压力 (ENO-3 格式)

Fig.10 3D plane shock reflect problem (no viscous), pressure contour (ENO-3 scheme)

2.2 高阶格式应用分析

(1) 非均匀网格对解的影响

在网格非均匀的情况下，原先在均匀网格下分析的精度，在推广到非均匀网格中时精度是降低的。若相邻网格尺度分别为 h_2 与 h_1 ，可以由 Taylor 展开式分析得，对于 $h_2 \neq h_1$ ， h_2 与 h_1 差别越大，精度越低，除非网格间距缓慢变化，不然，形式上的截断误差只能退化、不能改善。已有人对某些问题进行了分析，发现网格步长改变的地方会发生波的反射现象，但是为了提高局部分辨率，提高网格效率，网格间距的变化在计算中仍然需要，这在实际问题中需要小心处理。采用标量方程考察了高阶格式截断误差对网格变化的敏感程度。这里采用了光滑变化的网格，其变化曲线如图 12 所示，计算结果如图 11 所示，表 1 给出了格式在不同网格中的精度值。

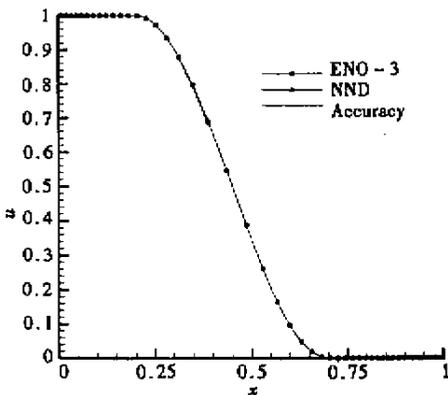


图 11 网格变化后不同格式计算结果

Fig.11 Results of different scheme on transformed mesh

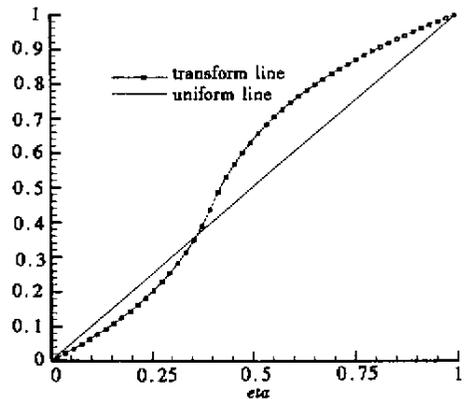


图 12 网格变化和网格均匀分布对比

Fig.12 Transformed mesh and uniformed mesh

从表 1 中可以看出，高阶格式对坐标变换的敏感程度较高，非均匀网格带来的精度损失比 NND 格式大的多，如 4 阶 ENO 精度变化接近 4 倍。因而在计算中网格变化时要谨慎，要考虑到网格局部的变化的确能够给流动结构的分辨和计算精度带来足够的好处。

表1 不同格式计算结果误差分析表

Tab.1 Truncated error analysis on results of different scheme

格式名称	格式阶数	误差 L_∞ (均匀网格)	误差 L_1 (均匀网格)	误差 L_∞ (网格变化)	误差 L_1 (网格变化)
ENO-4	4	1.63019e-4	7.19316e-6	5.46321e-4	4.57072e-5
ENO-3	3	3.02972e-4	1.54318e-5	5.88983e-4	5.03078e-5
NND	2	8.10031e-4	5.60951e-5	9.38982e-4	9.30951e-5

(2) 格式精度分析

采用标量方程考察格式在计算中误差的分布和物理量一阶和零阶的精度。计算中取 CFL=0.5, 时间 $t = 0.5$ 。

$$\text{初值为 } f(x) = \begin{cases} 1.0 & x < 0.15 \\ 0.5 + 0.5 \cdot \cos[\pi \cdot (x - 0.15)/0.2] & 0.15 \leq x \leq 0.75 \\ 0.0 & x > 0.75 \end{cases}$$

表2 物理量 L_∞ 模的误差Tab.2 Variable 's truncated error on L_∞

网格数	NND	ENO-3	ENO-4
50	4.67515e-2	1.3779e-3	9.08995e-3
100	2.02641e-3	4.677e-4	2.67398e-4
200	8.4254e-3	1.863e-3	9.52005e-4

表3 物理量 L_1 模的误差Tab.3 Variable 's truncated error on L_1

网格数	NND	ENO-3	ENO-4
50	1.22138e-2	1.87002e-3	1.02739e-3
100	3.76334e-3	4.19826e-4	2.00145e-4
200	1.07753e-3	9.25983e-5	4.02213e-5

从表2、表3可以看出, 各种格式在物理量的零阶计算中, 在不同网格数下基本都具有较高的精度, 物理量的值区间是 1.0, 因而表中数据也可以看作是相对误差。在网格数为 50 时, 3 阶 ENO 格式在 L_∞ 模下的误差也只有 1.38%, 而在 L_1 模下误差仅为 0.187%, 能够满足工程应用的需要。这也说明: 在现今计算中对于物理量的零阶量的计算, 如压力分布等, 一般都较为准确。从表2、表3还可以看出, 同样的网格点数 4 阶 ENO 格式的计算精度要高于 3 阶 ENO 和 NND 格式, 这同格式分析是一致的。而且随着网格的改善, 高阶格式的精度改进的更明显。

表4 物理量一阶导数的 L_∞ 模误差Tab.4 Variable derivative 's truncated error on L_∞

网格数	NND	ENO-3	ENO-4
50	1.45495	5.6827e-1	3.9892e-1
100	1.0037	4.2475e-1	2.4925e-1
200	7.15713e-1	2.65404e-1	1.896e-1

表 5 物理量一阶导数的 L_1 模误差Tab.5 Variable derivative 's truncated error on L_1

网格数	NND	ENO-3	ENO-4
50	4.58458e-1	6.71173e-2	4.73523e-2
100	2.02022e-1	2.98816e-2	1.66983e-2
200	9.12001e-2	1.24739e-2	6.50455e-3

从表 2、表 3 中 L_1 模和 L_∞ 模误差大小分析以及图 13 可以看出，ENO 格式的计算的物理量误差仅集中在局部，整个区域的分布很小。4 阶 ENO 和 3 阶 ENO 格式的物理量误差集中在函数 2 阶导数不连续的地方，而 2 阶 NND 格式整体区间误差分布都比较大。可以看出，ENO 格式要求物理量在满足“足够”（高于格式阶数的可导性）光滑的情况下，形式上的精度分析才是有效的。

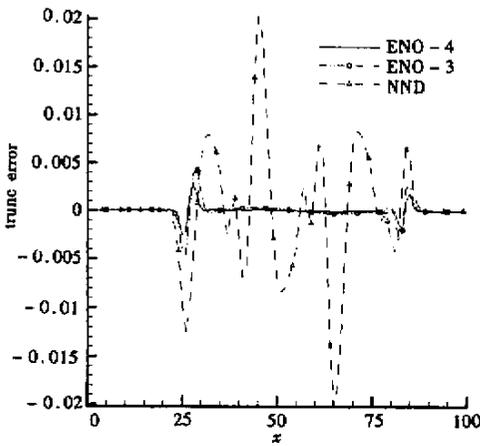


图 13 100 点时不同格式物理量误差分布

Fig.13 Variable 's truncated error of different scheme on 100 dot mesh

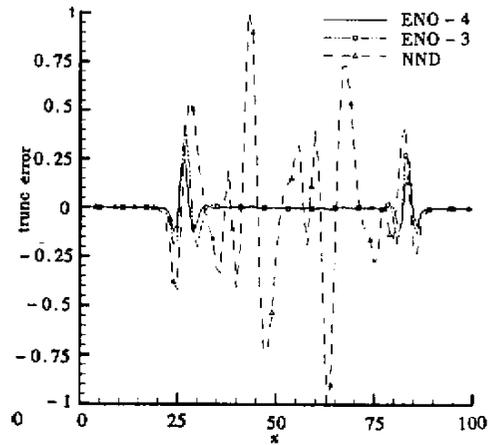


图 14 100 点时不同格式物理量一阶导数误差

Fig.14 variable derivative 's truncated error of different scheme on 100 dot mesh

从表 4、5 可以看出，物理量一阶导数的误差较零阶有很大的增长，即使对于 4 阶 ENO 格式在网格数为 50 时，在 L_∞ 模下的误差也达到了 0.4，考虑到导数的最大值约为 7.85，其相对误差达到了 5%，而在 L_1 模下误差也有 4.73523e-2。相应地 NND 格式在网格数为 50 时，相对误差接近于 20%。在涉及到物理量导数的问题中，如粘性扩散等一类涉及粘性应力的问题，粘性应力的大小同速度分布的梯度成正比。这样的计算会严重影响流场分析的准确性。这也说明了为什么在 CFD 中粘性应力、热流率等问题的计算结果经常会有较大的误差，而且随着网格的变化，计算结果会有较大的不同。随着网格的改进，物理量导数的精度增长速度远远小于原始物理量误差的变化趋势，改进并不明显，如 NND 格式在网格数为 200 时，在 L_∞ 模下的误差也有 0.72，而在 L_1 模下误差为 0.09，仅减小了一半。

从表 2、3 中可以看出，对于物理量的零阶分布，NND 格式在 200 个网格数时的误差基本上同 4 阶 ENO 在 50 个网格数时的误差相同。也就是说，对于同样一个问题，在计算中要获得同样的精度，4 阶 ENO 的网格数在一维情况下比 NND 格式可以减小 4 倍。从表 4、5 中可以看出，对于物理量的一阶分布 NND 在 200 个网格数时的误差，仍比 4 阶 ENO 在 50 个网格数时的误差大很多，而且通过图 13、14 可以看出，高阶格式，如 3 阶 ENO、4 阶 ENO 误差集中在物理量分布 2 阶导数不连续处，其它大部分区域的误差是较小的，因而可以应用于工程计算，然而 NND 格式在整个计算区域上误差都较大，不少地方达到了 10% 以上，因而在应用中会带来很大的误差，难于求得良好的计算效果。

3 总结

在对 ENO 格式的分析和应用中可以看出：高阶 ENO 格式在同样的计算条件下，同现有常用的 NND 格式相比，具

有较小的截断误差以及对复杂流动现象较强的分辨能力。在一维情况下 ENO 格式较其他格式有较为优越的表现：截断误差小、极值处不降阶、对间断有良好的分辨率。通过二维、三维应用也表明，高阶 ENO 对各种间断有良好的分辨效果。高阶 ENO 格式对于网格的变化较低阶格式更为敏感，因此在计算中网格加密所带来的精度改进与其所带来的误差需要仔细地考虑，以确定满足合理计算精度要求下的网格变化。

高阶 ENO 格式在相同的精度要求下比低阶格式所需要的网格数更少，因而可以减少计算的存储量；同时由一阶导数的精度分析可以看出，采用高阶 ENO 格式能够明显的提高对它们的分辨精度。这在粘性等问题中的计算是非常重要的，由于篇幅所限，在后续的文章中我们会给出高阶格式在粘性问题的计算中所具有的优越性。

由于 ENO 格式在构造上的特点其算法是自相似的，使得 ENO 格式具有很好的可扩展性。在此基础上，本文完成了精度可变的一维、二维和三维 ENO 的计算程序。需要注意的是，在计算时间上 ENO 格式较常用 TVD 格式也有不小的上升，因而实际应用中应依据所研究问题的目的和精度要求选择合适的计算格式。

参考文献：

- [1] Harten , B. Engquist . S. Osher and S. Chakravarthy , Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes , III , [J] . Journal of Computational Physics , v71 (1987) : 231-303 .
- [2] C.-W. Shu and S. Osher . Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes , [J] Journal of computational Physics , v77 (1988) : 439-471 . .
- [3] C.-W. Shu and S. Osher . Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes ii , [J] Journal of computational Physics , v83 (1989) : 32-78 .
- [4] Harten . ENO schemes with subcell resolution [J] , JCP , v83 (1989) : 148-184 .
- [5] B. Bihari and A. Harten . Application of generalized wavelets : an adaptive multi-resolution scheme , [J] Journal of Computational and Applied Mathematics , v61 (1995) : 275-321 .
- [6] J. Casper and H. Atkins . A finite-volume high-order ENO schemes for two dimensional hyperbolic systems [J] . Journal of Computational Physics , v106 (1993) : 62-76 .
- [7] H.C. Yee & P.K. Sweby . Some Aspects of Numerical Uncertainties in Time-marching to Steady-State Numerical Solutions [C] . AIAA : 96-2052 .
- [8] 李松波著 . 耗散守恒格式理论 [M] . 高等教育出版社 , 1997 .
- [9] CHI-WANG SHU and STANLEY OSHER , Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes [J] . JCP , 1998 .
- [10] 邓小刚 . 粘性超声速复杂气动干扰的数值模拟研究 [D] . 国防科技大学博士学位论文 , 1991 , 10 .
- [11] 傅德熏、马延文 . 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟 [J] . 空气动力学学报 , Vol. 16 , 1998 , 3 .
- [12] 张涵信等 . 网格与高精度差分计算问题 [J] . 力学学报 , 1999 , 31 .

