

文章编号 :1001-2486(2000)06-0113-04

## 含非线性介质 Fabry-Perot 腔混沌研究\*

袁圣付 姜宗福

(国防科技大学理学院,湖南长沙 410073)

**摘要** 根据混沌动力学的基本理论,计算了含非线性介质 Fabry-Perot 腔动力学方程在其参数下的 Lyapunov 指数分布图。利用 Lyapunov 指数和动力学特性的对应关系,分析出非线性 Fabry-Perot 腔在各种参数下的动力学特性、稳态参数区域面积和混沌转换机制。

**关键词** 非线性 Fabry-Perot 腔; Lyapunov 指数; 混沌

**中图分类号** :O59 **文献标识码** :A

## A Study of the Chaos of Non-linear Fabry-Perot Resonator

YUAN Sheng-fu, JIANG Zong-fu

(College of Science, National Univ. of Defence Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** Based on the basic theory of chaos dynamics, Lyapunov exponential index number of the difference equation, controlling the dynamical characteristics of Non-linear Fabry-Perot (NFP) resonator, has been calculated. Using the relationship between Lyapunov exponential index number and NFP, the dynamical characteristics of NFP have been studied. The parameter region of the NFP outputs stable intensity, and the mechanism of conversion from stable state to chaos, have been analyzed and made out.

**Key words** Non-linear F-P (NFP) Resonator; Lyapunov Exponential Index Number; Chaos

混沌理论在现代科学技术中起着十分重要的作用。它与其它学科相互渗透。在光学混沌的研究上,开始于 Ikeda 对含二能级原子吸收介质的 Fabry-Perot 腔混沌的研究<sup>[1]</sup>,并得到了实验的验证<sup>[2]</sup>。文献 3 对含非线性介质 Fabry-Perot 腔(简称 NFP 腔)的双稳态进行了研究;文献 4 作者考虑了介质响应和延迟对 NFP 腔的影响,得到了 NFP 腔不经历  $2^n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) 分岔而由稳态直接进入混沌的结论;文献 5 作者发现 NFP 腔的动力学特性远比文献 4 描述的要复杂,并找到了一种新的动力学转换机制,但未能作出 NFP 腔的动力学方程参数张成的相图。所以,上述对 NFP 腔的动力学特性研究还不够完整。在本文根据混沌动力学的基本理论,计算得到了与相图具有相同作用的 Lyapunov 指数分布图,比较完整地研究了所有参数范围内 NFP 腔的混沌动力学特性和混沌转换机制。

## 1 NFP 腔动力学方程

入射光  $i_0$  经 NFP 腔后的透射光强  $i(t)$  为:

$$i(t) = \frac{i_0}{1 + F \sin^2[\phi(t)]} \quad (1)$$

加入反馈后,参照文献 4],令  $\phi(t) = \alpha' G(i(t-T))$ , 其中  $T$  为延迟时间。式(1)可以化为:

$$i(t) = \frac{i_0}{1 + F \sin^2[\alpha' G(i(t-T))]} \quad (2)$$

采用记号

$$I_{n+1} = \frac{i(t)}{i_0/F}, \quad I_n = \frac{i(t-T)}{i_0/F}; \quad \beta = \frac{1}{F}, \quad \alpha = \alpha' G \frac{i_0}{F}$$

则式(2)可以改写为如下的差分方程:

\* 收稿日期 2000-03-05  
作者简介:袁圣付(1975-)男,博士生。

$$I_{n+1} = \frac{1}{\beta + \sin^2(\alpha I_n)} \quad (3)$$

其中  $I_n$  是第  $n$  次透射输出的光强,  $\beta$  是与腔的反射率有关的参数,  $\alpha$  是与非线性介质和反馈有关的参数。选择不同的参数  $\beta$  与  $\alpha$  值, 由差分方程迭代得到的透射光强  $I_n$  可能处于稳态、周期轨道或混沌。

## 2 基本理论和研究方法

混沌运动的基本特征之一是对初始条件极为敏感, 两个非常靠近的初值所产生的轨道, 随着时间的推移按指数方式分离。对于类似于式(3)的一维动力学系统, Lyapunov 指数  $\sigma$ <sup>[6]</sup> 是定量描述这一现象的量:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (4)$$

其中  $x_i = f(x_{i-1})$ , 其物理意义是表示多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离的指数, 即距离为  $\epsilon$  的两个点, 经过  $n$  次迭代后距离变为  $\epsilon e^{n\sigma}$ 。当  $\sigma < 0$  时, 相邻点终归要靠拢、合并成一点, 对应于稳定的周期点或不动点。如果  $\sigma > 0$ , 则运动轨道局部不稳定, 相邻点的轨道最终按指数方式分离, 轨道发散; 如果轨道有整体的稳定因素, 例如有捕捉区域、耗散等, 则在此作用下反复折叠, 形成混沌吸引子。 $\sigma > 0$  可以作为混沌的判据,  $\sigma$  由负变正表明运动向混沌机制的转变, 若转换机制是经历  $2^n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) 周期分岔后趋向混沌,  $\sigma = 0$  是分岔点;  $\sigma$  由正变负表明运动由混沌向稳态或周期点转变,  $\sigma = 0$  是逆分岔点。在  $\sigma$  大于 0 的区间内,  $\sigma$  小于 0 的子区间对应于周期窗口, 即混沌区内的“乱中有序”。

本文的研究方法就是根据(4)式, 利用迭代方法计算出差分方程(3)在给定参数范围内的 Lyapunov 指数, 分析出 NFP 腔动力学特性以及参数变化时由稳态向混沌转换的机制。作出对应参数下的光强输出分布图, 分析其与 Lyapunov 指数的对应关系。

## 3 计算结果与分析

图 1 给出了  $\alpha \in [0, 12]$ ,  $\beta \in [0, 1]$  的所有参数范围内的 Lyapunov 指数等值线分布图。由图可以分析出 NFP 腔在各种参数时的动力学特性、稳态参数区域面积和混沌转换机制。

参数  $\alpha, \beta$  取不同值时, NFP 腔的动力学状态完全不同。例如, 当  $\beta = 0.69, \alpha = 0.5$  时, NFP 腔最终输出光强  $I_n$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) 处于稳态; 当  $\beta = 0.2, \alpha = 0.5$  时, NFP 腔最终输出光强  $I_n$  处于二周期轨道; 当  $\beta = 0.07, \alpha = 0.4$  时, NFP 腔最终输出光强  $I_n$  处于四周期轨道; 当  $\beta = 0.025, \alpha = 0.2$  时, NFP 腔最终输出光强  $I_n$  出现混沌。选择其它  $\alpha, \beta$  参数时, NFP 腔的  $I_n$  处于其它动力学状态, 如八周期轨道, 等等。上述动力学特性可以从图 1 分析得到, 结论的正确性可以直接由差分方程(3)迭代进行验证。

稳态参数区域面积对于 NFP 腔的稳定性控制具有极大的意义。选择稳态参数区域面积较大时对应的  $\alpha, \beta$  参数, 是得到稳定激光输出时必须考虑的。由图 1 可以分析出各种  $\alpha, \beta$  参数取值时的稳态参数区域面积的大小, 例如  $\beta = 0.73, \alpha = 0.5$  点附近的稳态参数区域面积很大, 而在  $\beta = 0.06, \alpha = 1.820$  附近, 稳态参数区域面积很小。如果 NFP 腔工作在稳态参数区域面积很小的情况下, 则参数  $\alpha, \beta$  的微小改变都可能使激光器的光强输出进入混沌状态 ( $\beta = 0.06, \alpha = 1.821$ )。

分析图 1 可以得出参数  $\alpha, \beta$  变化时的混沌转换机制。例如当  $\beta = 0.0578$  时, 图 2 给出了参数  $\alpha \in [0, 2.4]$  变化时光强  $I_n$  的迭代相图和对应的在图 1 中的 Lyapunov 指数图。结合 Lyapunov 指数的物理意义, 对比图 2(a) 和图 2(b) 的形状可知, 差分方程(3)的动力学特性和计算出的 Lyapunov 指数完全对应。图 2 呈现出稳态  $\rightarrow 2^4$  周期分岔  $\rightarrow$  逆分岔  $\rightarrow$  稳态  $\rightarrow$  混沌的转换机制。图 3 给出了  $\beta = 0.025, \alpha \in [0, 1.0]$  时对应的光强  $I_n$  的迭代相图和 Lyapunov 指数图。图 4 给出了  $\beta = 0.99, \alpha \in [0, 12.0]$  时对应的光强  $I_n$  的迭代相图和 Lyapunov 指数图, 呈现出稳态  $\rightarrow 2^\infty$  周期分岔  $\rightarrow$  混沌  $\rightarrow$  逆分岔  $\rightarrow$  稳态  $\rightarrow$  混沌的转换机制。仔细分析图 1 可知, 有三种动力学特性转换机制: 稳态  $\rightarrow 2^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 周期分岔  $\rightarrow$  逆分岔  $\rightarrow$  稳态; 稳态  $\rightarrow 2^\infty$  周期分岔  $\rightarrow$  混沌; 稳态(不分岔)  $\rightarrow$  混沌。混沌中存在不少周期窗口 ( $\sigma < 0$  区域)。

此外, 进一步分析图 1 可知: 对于确定的参数  $\beta$ , 当参数  $\alpha$  变化时, NFP 腔的动力学特性具有某种

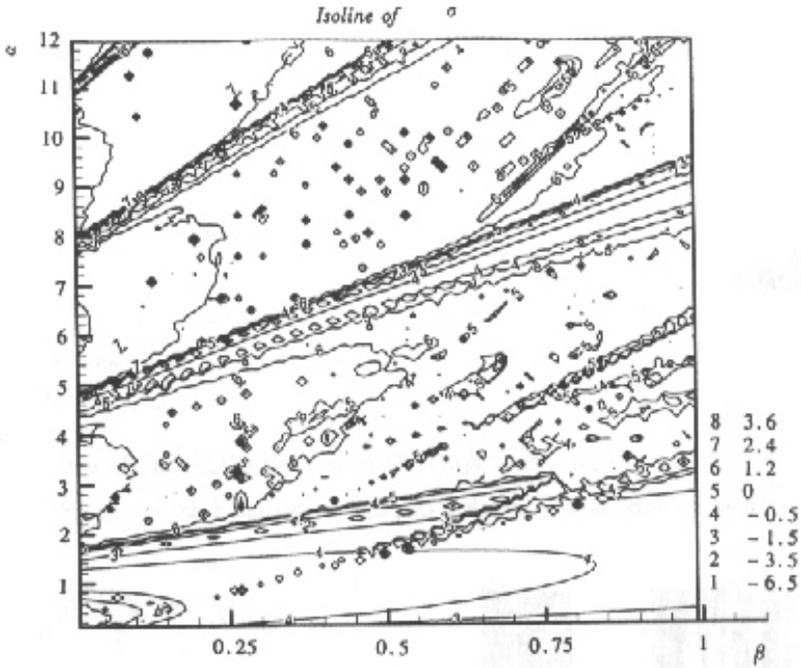


图 1

Fig.1 Isoline of Lyapunov exponential index number

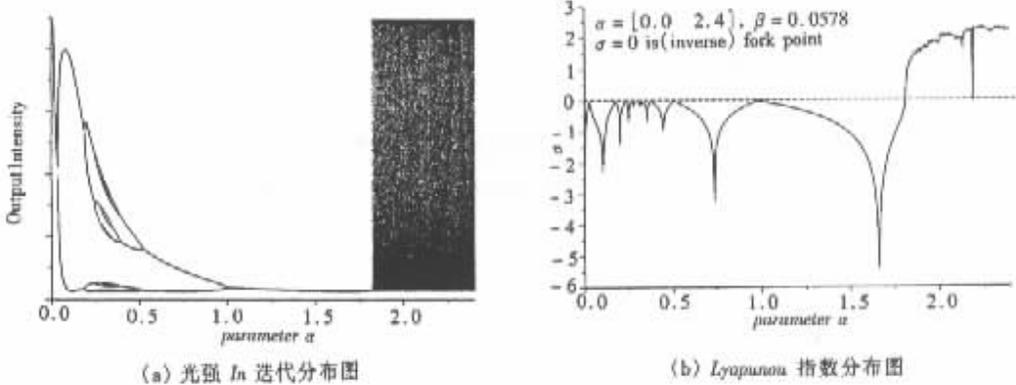


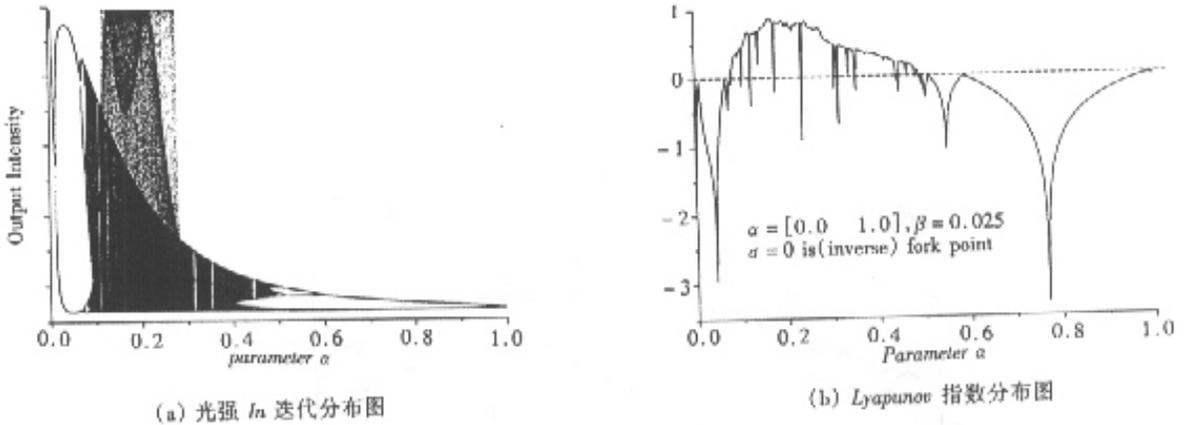
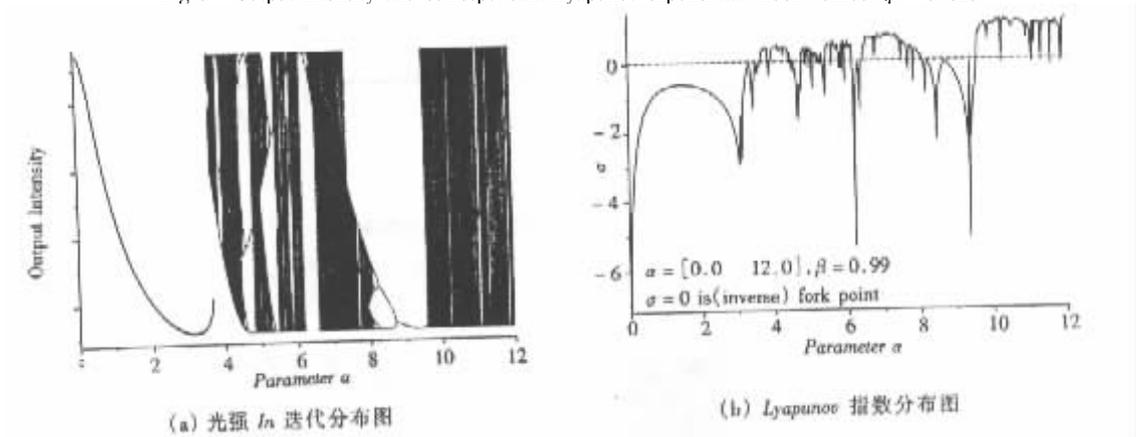
图 2 光强  $I_n$  迭代分布图及其对应的 Lyapunov 指数分布图  $\beta = 0.0578$

Fig.2 Output intensity and correspondent Lyapunov exponential index number  $\beta = 0.0578$

“周期性”这可能与式(3)中的正弦函数有关。对于任意的参数  $\alpha, \beta$  利用上述方法,同样可以得到其对应的 NFP 腔动力学特性。

#### 4 结论

NFP 腔的动力学特性非常复杂。本文计算的 Lyapunov 指数随  $\alpha, \beta$  变化的分布图,与 NFP 腔动力学参数张成的相图具有相同的作用。对于 NFP 腔存在的一维混沌,利用 Lyapunov 指数分布图,可以分析出 NFP 腔在各种参数下的动力学特性,稳态参数区域面积的大小和具有三种可能的混沌转换机制。这些结果对于 NFP 腔控制具有很大的指导作用。

图3 光强  $I_n$  迭代分布图及其对应的 Lyapunov 指数分布图,  $\beta = 0.025$ Fig.3 Output intensity and correspondant Lyapunov exponential index number  $\beta = 0.025$ 图4 光强  $I_n$  迭代分布图及其对应的 Lyapunov 指数分布图,  $\beta = 0.99$ Fig.4 Output intensity and correspondant Lyapunov exponential index number  $\beta = 0.99$ 

## 参考文献:

- [1] Ikeda K, Optical Communication[J]. 1979, 30(2).
- [2] Gibbs H M, Hopf F A, Kaplan D L, et al. Physics Letters[J]. 1981, 46(7).
- [3] Narburger J H, Felber F S. Physics Review(A)[J]. 1978, 17(1)
- [4] 谭维翰, 刘仁红. 论文[J]科学通报. 1991(14).
- [5] 蒋志平, 孙凤国. 非线性 Fabry—Perot 腔的分岔和混沌行为[C]. 国防科技大学校庆四十周年论文集. 第三卷. 1993.
- [6] 陈示华, 陆君安. 混沌动力学初阶[M], 武汉水利电力大学出版社, 1998.

