

文章编号: 1001-2486 (2001) 01-0001-04

非定常超音速流动数值计算方法比较*

刘伟, 牟斌

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 为适用于非定常流场计算, 在保证时、空二阶精度的前提下, 通过引入变系数残值光顺技术, 提高了四步 Runge-Kutta 方法的计算效率; 并针对球锥筒谐振动过程, 数值比较 Runge-Kutta 多步法和“双时间法”的计算精度。

关键词: 非定常流; 数值计算; 双时间法; Navier-Stokes 方程

中图分类号: V434 文献标识码: A

A Comparison of Numerical Computational Methods for Unsteady Supersonic Flow

LIU Wei, MOU Bin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The implicit varied coefficient residual smoothing technology was introduced into the four-stage Runge-Kutta scheme to increase the computational efficiency for unsteady supersonic flow under keeping second order accuracy in time and space. The computational results achieved by four-stage Runge-Kutta scheme and dual-time method were compared through numerical simulation unsteady harmonic oscillating flow around sphere-cone.

Key words: unsteady flow; numerical calculation; dual-time method; Navier-Stokes equations

第四代战斗机及新型战略(术)导弹对超音速飞行、隐身及高机动性、敏捷性的追求, 使得人们对非定常流动研究日趋重视。事实上, 迄今为止, 流体力学家对非定常流动的认识远未像对定常流动那样深刻, 但一些初步的研究成果已使人们在航空、航天领域获得了巨大收益, 如快速俯仰震荡中产生的非定常涡升力使人们突破了对传统“失速”概念的理解, 从而使大攻角机动飞行成为现实。正因为如此, 非定常流动机理研究及其巨大应用潜力的挖掘已成为 21 世纪流体力学研究的重要课题。

作为流体力学三大研究手段之一的计算流体力学在过去 30 年里取得了令人瞩目的发展, 特别是 TVD、ENO 等高阶格式的出现, 使得流场的空间分辨率大大提高, 并很好地模拟了激波、漩涡等复杂流动现象。上述格式与 ADI、LU 等隐式技术结合而发展的一类高效隐式算法已成为目前 CFD 应用中的主流算法。应指出的是, 上述隐式算法的应用重点是定常流场计算, 因此其时间精度往往只有一阶(甚至不到)。在非定常流动计算中, 目前常见的算法有两类, 一是在时间方向采用 Jameson 的显式多步 Runge-Kutta 法离散, 以提高时间精度; 二是为了充分利用上述高效隐式算法而发展的“双时间法”^[1, 2]。前者虽然对稳定库朗数有所提高, 但由于多步性, 计算效率仍很低下, 后者要保证时间二阶精度以上, 对“亚迭代”技术要求较高。因此, 在保证时、空高阶精度的前提下, 发展高效率的非定常流动计算方法, 并比较不同算法结果的差异是十分有意义的。

1 控制方程

在完全气体假定下, 采用 N-S 方程做为出发方程, 其一般坐标系下方程形式为

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \zeta} \quad (1)$$

式中: \bar{U} 为求解矢量, \bar{E} 、 \bar{F} 、 \bar{G} 为无粘通矢量, \bar{E}_v 、 \bar{F}_v 、 \bar{G}_v 为粘性通矢量。

* 收稿日期: 2000-09-01

基金项目: 国家 863 高技术资助项目 (863-2.98.6)

作者简介: 刘伟 (1965-), 男, 副研究员, 硕士。

2 数值离散方法

本文考虑球锥外形的非定常简谐振动过程,涉及定常、非定常流场计算。

2.1 定常流场计算

对定常流场,采用计算效率较高的经对角化处理的隐式 NND 格式,该格式在空间上除个别点外,具有二阶精度。格式具体离散形式见文献 [3],ADI 形式如下

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \Delta t \delta_{\xi} \tilde{\mathbf{A}}_A) \Delta \bar{\mathbf{U}}^* &= \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{RHS} \\ (\mathbf{I} + \Delta t \delta_{\eta} \tilde{\mathbf{A}}_B) \Delta \bar{\mathbf{U}}^{**} &= \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{R}_A \Delta \bar{\mathbf{U}}^* \\ (\mathbf{I} + \Delta t \delta_{\zeta} \tilde{\mathbf{A}}_C) \Delta \mathbf{U}^{***} &= \mathbf{R}_C^{-1} \mathbf{R}_B \Delta \bar{\mathbf{U}}^{**} \\ \Delta \bar{\mathbf{U}} &= \mathbf{R}_C \Delta \mathbf{U}^{***} \\ \bar{\mathbf{U}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{U}}^n + \Delta \bar{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 非定常流场计算

为提高非定常流场时间计算精度,目前有两类主要算法,一是在时间方向采用显式多步 Runge-Kutta 法离散;二是在充分利用 ADI、LU 分解等高效隐式算法基础上而发展的“双时间法”。为提高多步 Runge-Kutta 法计算效率,本文引入 Jameson 提出,并经 Jorgenson 和 Chima 改进的隐式变系数残值光顺技术^[4],在四步 Runge-Kutta 格式每步后对残值进行光顺处理。“双时间法”由于虚拟时间项的具体差分形式不同而不同,本文选取文献中较为常见的一种方法做为比较^[1,2]。

2.2.1 不含残值光顺技术的四步 Runge-Kutta 方法 (RK4)

经典的时间二阶的四步 Runge-Kutta 格式形式如下

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^n \\ \bar{\mathbf{U}}_j^{(1)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \mathbf{RHS}^{(0)} \\ \bar{\mathbf{U}}_j^{(2)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} - \alpha_2 \Delta t \mathbf{RHS}^{(1)} \\ \bar{\mathbf{U}}_j^{(3)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \mathbf{RHS}^{(2)} \\ \bar{\mathbf{U}}_j^{(4)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} - \alpha_4 \Delta t \mathbf{RHS}^{(3)} \\ \bar{\mathbf{U}}^{(n+1)} &= \bar{\mathbf{U}}^{(4)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中, Δt 为时间步长 ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) = ($\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$), $\mathbf{RHS}^{(i)}$ 为式 (1) 的空间差分,采用 NND 格式离散。NND 型的四步 Runge-Kutta 格式时、空均具有二阶精度。

2.2.2 含残值光顺技术的四步 Runge-Kutta 方法 (RK4S)

显式四步 Runge-Kutta 格式的时间步长受稳定库朗数的限制,因此要提高非定常流场的计算效率,应对格式进行一定的处理。本文采用隐式变系数残值光顺方法^[4]。在 Runge-Kutta 格式每推进一步后对残值进行光顺处理

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^n \\ (1 - \epsilon \delta_{\xi\xi}) \{ (1 - \epsilon \delta_{\eta\eta}) \{ (1 - \epsilon \delta_{\zeta\zeta}) \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)*} \} &= \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} \\ \bar{\mathbf{U}}_j^{(i)} &= \bar{\mathbf{U}}_j^{(0)} - \alpha_i \Delta t \mathbf{RHS}^{(i-1)*} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ (1 - \epsilon \delta_{\xi\xi}) \{ (1 - \epsilon \delta_{\eta\eta}) \{ (1 - \epsilon \delta_{\zeta\zeta}) \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(i)*} \} &= \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(i)} \\ \bar{\mathbf{U}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{U}}^{(4)} \end{aligned} \quad (4)$$

$\Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(i)}$ 为每推进一步后的残值, $\Delta \bar{\mathbf{U}}_j^{(i)*}$ 为光顺后的残值。 ϵ 为光顺参数,由当地库朗数决定

$$\epsilon(i, j, k) = \max\left(0, \frac{1}{4} \left[\left(\frac{CFL_{i,j,k}}{CFL^*} \right)^2 - 1 \right] \right) \quad (5)$$

CFL^* 为受原格式稳定性限制的库朗数, $CFL_{i,j,k}$ 为当地计算库朗数。和常系数光顺相比,在远离物面处,由于网格间距大,当地库朗数 $CFL_{i,j,k}$ 远远小于 CFL^* ,因此 ϵ 为零,这样选取光顺参数避免了远

离物面处的物理信息的损失。Jorgenson 证明残值光顺对流场的影响为 $O(\epsilon \Delta x^3)$ 量级^[4]，因此，只要 ϵ 不是太大，隐式残值光顺对流场的空间精度没有影响，并且由于残值光顺是在空间上进行，对时间精度也没有影响。

2.2.3 非定常流动计算的“双时间法 (Dual-time)”

为提高非定常流场计算效率，20 世纪 90 年代中期国外在 ADI、LU 分解等定常流场高效隐式算法基础上通过引入“亚迭代”技术，发展了一种所谓“双时间法 (Dual-time)”的非定常流动计算方法。作为不同算法的比较，本文选取应用中较为常见的一种“双时间”处理方法，假定 L 代表式 (2) 中 ADI 算法的左端算子，则有

$$L(\Delta \bar{U}^{\gamma+1}) = -\Delta t \left[\frac{3\bar{U}^\gamma - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t_R} + \delta_\xi \bar{E}^\gamma + \delta_\eta \bar{F}^\gamma + \delta_\zeta \bar{G}^\gamma - \delta_{\xi\xi} \bar{E}_v^\gamma - \delta_{\eta\eta} \bar{F}_v^\gamma - \delta_{\zeta\zeta} \bar{G}_v^\gamma \right]$$

如 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} L(\Delta \bar{U}^{\gamma+1}) \rightarrow 0$ ，则 $\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \Delta \bar{U}^{\gamma+1}$ (6)

式中无粘通量采用 NND 格式离散，粘性通量采用中心差分离散。 Δt_R 代表真实时间步长 Δt 代表某一“冻结时刻(真实)”时的“亚迭代”时间步长， \bar{U}^n 、 \bar{U}^{n-1} 分别表示第 n 、 $n-1$ 真实时刻的守恒矢量，上标“ γ ”代表亚迭代计算值。显然，如果 (6) 式亚迭代收敛，即 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} L(\Delta \bar{U}^{\gamma+1})$ 趋于零，算法在 $n+1$ 时刻时、空均为二阶精度。

2.3 初边值条件

定常流场和动态流场计算时，壁面均提无滑移边界条件 $V = V_{wall}$ 和等温壁条件 $T = T_{wall}$ 。外边界按流动分为入流条件和出流条件，入口赋超音速来流值，出口流动参数由零梯度条件外推。对稳定流场，近壁压强梯度 $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{wall} = 0$ 。对动态流场，压力边界条件采用法向动量方程。由于俯仰振动时流场左右对称，采用对称条件处理对称面。初值条件提法，对定常流场，物理量按线性分布赋值。动态流场以定常流场收敛解为初场。

3 计算结果及分析

计算外形为球锥体，底部直径 $d_B = 50\text{mm}$ ，头部半径 $R_n = 10\text{mm}$ ，半锥角 $\theta = 10^\circ$ 。球锥绕质心做简谐振动时的方程为

$$\alpha = \theta = \alpha_a - \alpha_m \cos kt \tag{7}$$

式中： α 为瞬时攻角， θ 为俯仰角， α_a 为平均攻角， α_m 为振动幅度， k 为减缩频率，初始攻角 $\alpha_0 = \alpha_a - \alpha_m$ 。简谐振动时，物面位置随时间变化，本文采用代数方法生成网格以减少动网格的生成时间，网格数为 $37 \times 19 \times 35$ (流向 \times 周向 \times 法向)。

来流条件为 $M_\infty = 6.85$ ， $\alpha_0 = 10^\circ$ ， $Re_N = 2.9 \times 10^5$ ， $T_\infty = 67.0\text{K}$ ；壁温 $T_w = 300\text{K}$ 。球锥体最大振幅 $\alpha_m = 1^\circ$ ，减缩频率 $k = 1.0$ ，流态为层流。

图 1 为定常流场计算时，含残值光顺技术 (RK4S) 和不含残值光顺技术 (RK4) 的四步 Runge-Kutta 法的最大密度残值下降曲线比较。由于残值光顺过程可分解为三对角标量追赶完成，计算量只增加了 15%，而 CFL_{max} 却提高了 10 倍以上。因此光顺技术大大提高了非定常流场的计算效率。此外，残值光顺技术还保留了显式格式的简明性，有利于复杂边界条件的处理。

图 2 为含残值光顺技术 (RK4S) 和不含残值光顺技术 (RK4) 的四步 Runge-Kutta 法及“双时间法 (Dual-time)”计算非定常俯仰力矩随瞬时攻角变化曲线；图 3 为三种方法计算所得非定常力矩随时间变化曲线。从图中可见，含光顺技术的龙格-库塔法与原始的四步龙格-库塔法结果相当吻合。由于不含残值光顺技术的四步

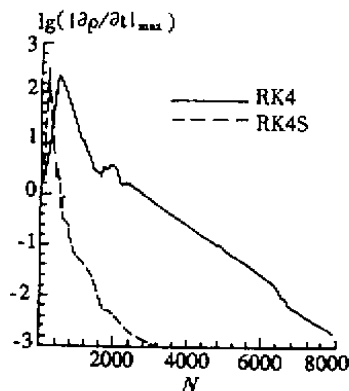


图 1 最大密度残值下降曲线
Fig.1 Curve of maximum density residue change

Runge-Kutta 法的时、空二阶精度是准确的,故从数值上验证了残值光顺技术对原格式的二阶精度没有影响。“双时间法”计算结果与龙格-库塔法则有所区别,这是由于双时间法的时间二阶精度是在“亚迭代”等于零时才准确成立的,而数值计算只能在一定精度下近似成立,存在一定的误差积累。因此,选择“双时间法”进行非定常计算时,“亚迭代”的收敛性是十分重要的,其对时间精度有明显影响。另外,非定常流动存在时间历史效应,“亚迭代”过程是否会损失非定常的“历史”信息,笔者认为亦是需要考虑的问题。

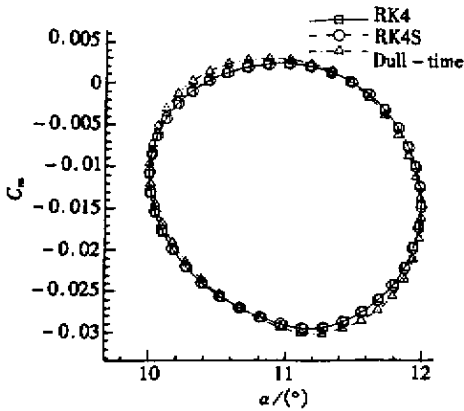


图2 C_m 随攻角变化曲线

Fig.2 Curve of C_m vs attack angle

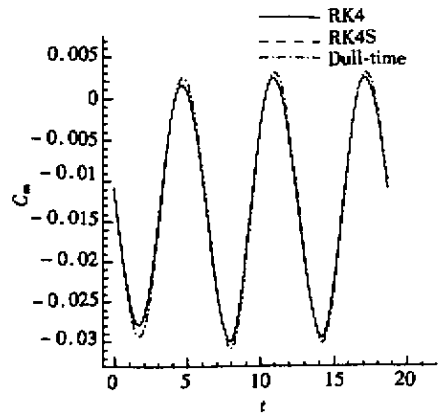


图3 C_m 随时间历程变化曲线

Fig.3 Curve of C_m vs time

4 结论

(1) 引入变系数残值光顺技术的四阶 Runge-Kutta 格式,在保证时、空二阶精度基础上,有效地提高了非定常计算效率。

(2) “双时间法”中的“亚迭代”收敛过程对时间精度有明显影响,应用中须认真考虑。

参考文献:

- [1] Gaitonde A L. A dual-Time Method for the solution of the Unsteady Euler Equations [J]. Aeronautical Journal, 1994, 10.
- [2] 江雄, 陈作斌, 张玉伦. 用双时间法数值模拟悬停旋翼流场 [J]. 空气动力学学报, 1998, 16(3).
- [3] 沈清. 一种高精度、高分辨率激波捕捉的迎风型 NND 格式 [A]. 第七届全国计算流体力学会议文集 [C], 1994.
- [4] Jorgenson P C E, Chima R V. An Unconditionally Stable Runge-Kutta Method for Unsteady Flows [C]. AIAA-89-0205. 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, 9~12, January, 1989.

