国 防 科 技 大 学 学 报
第 23 卷 第 1 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.23 No.1 2001

文章编号：1001-2486（2001）01-0011-04

随机梁的传递函数分析方法*

欧阳勇，任钧国，周建平

（国防科技大学航天与材料工程学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：该方法将传递函数方法与传统的随机摄动分析理论相结合，将随机场作 Karhunen-Loeve 正交展开，对静态随机梁结构进行了分析，并计算了其可靠性指标。这样一来克服了传统的有限元数值方法计算量大的困难，确立了随机梁结构分析的一种解析方法。

关键词：随机结构；传递函数；摄动理论；可靠性

中图分类号：O34　　**文献标识码**：A

Transfer Function Analytic Method for Stochastic Beams

OUYANG Yong，REN Jun-guo，ZHOU Jian-ping

（College of Aerospace and Material Engineering，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：The transfer function method is combined with the traditional spectral approach theory. The stochastic field is expanded by orthonormal Karhunen-Loeve method，the static stochastic beam analyzed and its credibility reckoned in the end. This method conquer the difficulty of the huge numerical computation of the traditional finite element method and an analytical analysis method of stochastic structure analysis is formed.

Key words：stochastic structures；transfer function；spectral approach theory；credibility

工程结构的各个方面都存在着不确定性，如结构材料性能参数的随机性、结构几何尺寸的随机性和尤为明显的载荷的随机性；另一方面，用有限单元法来分析复杂结构的随机特性已成为结构工程实践中广泛使用的的一项数值计算方法，但有限单元法的数值计算工作量比较大，这是其不足之处。传递函数方法[1]是控制论中用频域方法描述数学模型时引入的概念，且传递函数包含了微分方程的全部系数，与微分方程模型是相通的。将传递函数方法用于结构分析的工程背景源于 Mote 和 Yang 对带锯的主动控制的研究。随后，Tan 和 Chung 提出了广义位移法（GMD），用于分析带约束分布参数系统的自由和外力响应。而周建平教授利用 Fourier 变换和分布传递函数方法相结合的方式，对二维和三维的理想圆柱壳、层合圆柱壳等模型进行了分析。本文将传递函数方法与随机结构分析的传统摄动理论[3]相结合，以工程实际中常见的带有随机材料参数的静态梁结构为例，对随机场作 Karhunen-Loeve 正交展开[2]处理，分析了梁的静态随机响应，得到了其解析形式的解，并计算了其可靠性指标。

1　梁的时域动力学模型

梁是工程中一种最常见的结构构件，非均匀等截面细长梁的动力学控制微分方程可以表示为：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E(x)I\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t)\right]+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t)=f_e(x,t) \tag{1}$$

其中，$w(x)$ 为梁的挠度，$E(x)I$ 为梁的抗弯刚度，ρ 为材料密度，A 为梁的横截面积，$f_e(x,t)$ 为分布外力，$x\in[0,l]$。此方程中没有考虑梁的轴力、剪力的作用，属于简单的梁模型。

2　随机梁结构的传递函数处理方法

2.1　对随机参数作 Karhunen-Loeve 正交分解

将随机过程视为一些确定性时间函数随机组合的结果。若材料的弹性模量参数 $E(x)$ 服从某一随

* 收稿日期：2000-06-25
基金项目：国家部委基金资助（99J19.2.4KJD143）
作者简介：欧阳勇（1976-），男，硕士生。

机分布，对其作 M 阶截断的 K-L 正交展开，那么

$$E(x,\theta) = E_0 + \sum_{n=1}^{M} \xi_n(\theta)\sqrt{\lambda_n} f_n(x) \tag{2}$$

其中 E_0 是弹性模量的均值，λ_n、$f_n(x)$ 分别为随机场的特征值和特征函数。同时将梁的挠度 $w(x,t)$ 关于标准化的随机变量作 N 阶级数截断展开[3]：

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w_0 + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial w}{\partial \xi_i}\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\xi_i\xi_j + \cdots \\ &= w_0 + \sum_{i=1}^{M} w_{1i}\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} w_{2ij}\xi_i\xi_j + \cdots + O(\xi^{N+1}) \end{aligned} \tag{3}$$

其中，ξ_n 是均值为零、方差为 1 且相互独立的标准化随机变量。对随机结构的正则摄动，(3) 式对任何随机分布的 $E(x)$ 均收敛[3]，因此可以对(2)、(3) 式取至相应的 M、N 阶截断以满足实际问题的精度要求。

2.2 随机参数摄动

基于问题的小参数渐近展开进行摄动。将式（2）和（3）代入式（1），然后合并同类项，有摄动方程

$$\begin{aligned} &(L_0 w_0 - h) + \sum_{i=1}^{M}(L_0 w_{1i} + L_{1i}w_0)\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(L_0 w_{2ij} + L_{2i}w_{1i} + L_{2j}w_{1j})\xi_i\xi_j + \\ &\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}(L_0 w_{3ijk} + L_{3ij}w_{2ij} + L_{3ik}w_{2ik} + L_{3jk}w_{2jk})\xi_i\xi_j\xi_k + \cdots\cdots = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

式中，$L_0, L_{1i}, L_{2ij}, L_{3ijk}$ 为确定性微分算子，h 为关于 x 的实函数，它们都可由具体问题决定其形式。利用随机变量值的任意性，其各项系数应均为零。则有摄动方程的分解式

$$\begin{aligned} &L_0 w_0 = h \\ &L_0 w_{11} = -L_{11}w_0 \quad L_0 w_{12} = -L_{12}w_0 \quad \cdots \\ &L_0 w_{211} = -L_{211}w_{11} - L_{21}w_{11} \qquad L_0 w_{212} = -L_{21}w_{11} - L_{22}w_{12} \quad \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

2.3 传递函数求解

运用传递函数方法求解微分方程。对方程组（5）各式进行 Laplace 变换，将其从时域转换到频域，引入传递函数模型，将微分方程写成在状态空间上的表述形式。定义状态变量

$$\eta_*(x,s) = \left\{\tilde{w}_*(x,s) \quad \frac{\partial}{\partial x}\tilde{w}_*(x,s) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{w}_*(x,s) \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3}\tilde{w}_*(x,s)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

“ $*$ ”代表 0、1i、2ij… 等下标值，那么（5）中各方程可以写成如下状态空间描述形式

$$\frac{\mathrm{d}\eta_*}{\mathrm{d}x} = F_*(x,s)\eta_*(x,s) + q_*(x,s) \tag{7}$$

其中

$$F_*(x,s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\rho A s^2}{E_0 I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_*(x,s) = \{0\ 0\ 0\ q_{*C}\}^{\mathrm{T}},$$

q_{*C} 表示方程组（5）中各对应等式右端项的 Laplace 变换。静力响应问题与动力响应问题的不同主要在于静力问题不存在初始条件，不需进行 Laplace 变换。为了便于统一处理，可以把静力问题看作是动力问题的简化，简化方法是令 $s=0$，这样得到的响应 $\eta_*(x,s)$ 实际就是静力响应 $\eta_*(x)$。将方程组（5）中各式均表述为（7）的形式。如是，梁挠度表达式（3）的各系数项均可以用如下传递函数方法来求解

$$\tilde{w}_*(x,s) = \int_0^l G_{1C}(x,\eta,s)q_{*C}(\eta,s)\mathrm{d}\eta + \sum_{j=1}^{C} H_{1j}(x,s)\gamma_j(s) \tag{8}$$

其中，$G(x,\eta,s) = \begin{cases} e^{F_*(x,s)x}(M(s)+N(s)e^{F_*(x,s)})^{-1}M(s)e^{-F_*(x,s)\eta}, & \eta < x \\ -e^{F_*(x,s)x}(M(s)+N(s)e^{F_*(x,s)})^{-1}N(s)e^{-F_*(x,s)(1-\eta)}, & \eta > x \end{cases}$；$M(s)$、$N(s)$、$\gamma(s)$ 为已知边界约束方程 $M(s)\eta(0,s)+N(s)\eta(l,s)=\gamma(s)$ 的系数项[1,3,5]；G_{1C} 表示矩阵 G 的第 1 行 C 列元素；H 为传递函数矩阵[1]，它的维数为 $C\times C$，从 $\gamma(s)$ 到 $\eta(x,s)$ 的传递函数阵记作

$$H(x,s) = e^{F(x,s)x}(M(s)+N(s)e^{F(x,s)})^{-1}$$

将（8）的解对应不同下标逐一进行 Laplace 反变换可得解 $w_*(x,t)$（而对于静力响应问题变换前后两者形式相同），据此可求得 $w_0, w_{1i}, w_{2ij}\cdots$ 等系数项，从而可以得到如(3) 形式的梁挠度 $w(x,t)$ 含随机参数的解析表达式。它的标准偏差

$$\sigma_w(t) = D^{\frac{1}{2}}[w(x,t)] \tag{9}$$

3 算例

以一静悬臂梁为例，见图 1，弹性模量的均值 $E=1.0$，梁的截面矩 $I=1.0$，受集中载荷 $P=1.0$ 作用，弹性模量服从指数协方差分布 $C(x_1,x_2)=e^{-c|x_1-x_2|}$，指数协相关尺度参数 $c=1.0$，梁长 $l=1.0$，所能承受的弯矩阈值为 1.10。

运用传递函数方法的计算结果与传统有限元方法[2]的计算结果的比较如图 2 所示。

从图 2 (a)、图 2 (b) 可以看出有限元方法的计算结果与本文方法所得的结果相近。图 2 (c) 表明该方法截断阶数取值越大，所得结果越逼近于一确定值，说明该方法是收敛的，结果可信度高。由于这是一种解析形式的解，该计算方法的 CPU 耗时也表明较小的计算量就可以获得较高精度的计算结果。

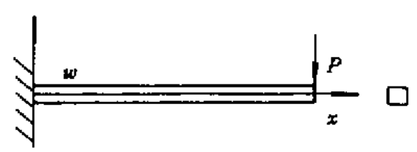

图 1 带随机材料参数的静悬臂梁

Fig.1 The beam with stochastic material parameter

4 随机梁的可靠性分析

结构分析的目的在于为结构设计提供定量依据，结构的可靠度是指结构在规定的时间内，在规定的条件下完成预定功能的概率。若 $g_i(x)$ 为状态函数[3]，根据具体情况可定义状态函数

$$g_i(x) = |A_i| - |Z_i| \tag{10}$$

A_i, Z_i 分别为对应的随机响应和其门槛值。可靠性指标定义为

$$\beta_i = \frac{E(g_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(g_i)}} \tag{11}$$

这样，一方面可以利用可靠性指标直接衡量结构的可靠性；另一方面还可以获得可靠度的一阶估计量[6]。

以算例中的悬臂随机梁为例，以梁的最大弯矩 $M(x)_{\max}$ 作为考察的静态随机响应，以梁弯矩的阈值作为门槛值。梁的弯矩表达式为

$$M(x) = E(x)I\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x) \tag{12}$$

将随机梁的挠度表达式（3）及式（2）代入式（12），可得

$$M(x)_{\max} = \left\{\left[E_0 + \sum_{n=1}^{M}\xi_n\sqrt{\lambda_n}f_n(x)\right]I\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[w_0 + \sum_{i=1}^{M}w_{1i}\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}w_{2ij}\xi_i\xi_j + \cdots + O(\xi^{N+1})\right]\right\}_{x=0} \tag{13}$$

当弹性模量服从指数协相关尺度参数 $c=1.0$ 的指数协方差分布时，可得：

$$E(g) = 0.0904, \sqrt{\mathrm{Var}(g)} = 0.0315$$

从而得出此静态随机梁结构的可靠性指标数值：$\beta_g = 2.86$。

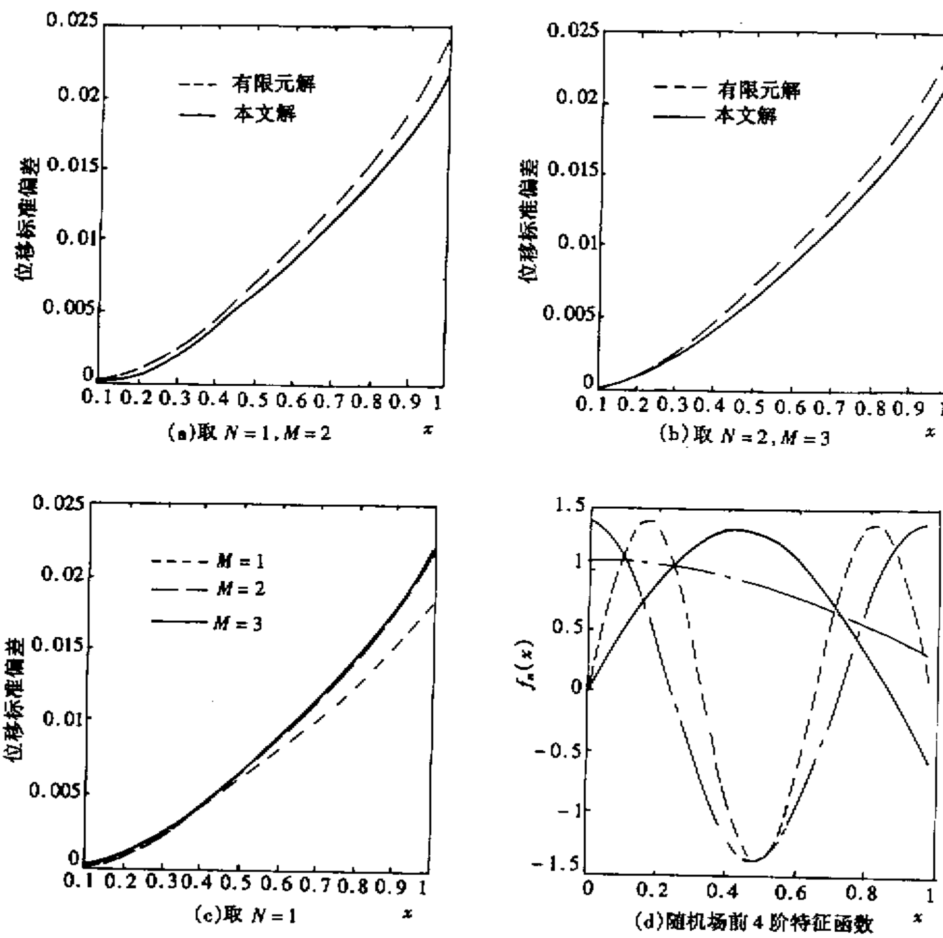

图2 沿梁方向的位移标准偏差

Fig.2 Standard deviation of displacement along the beam

5 结论

从以上的分析和算例中，我们可以得出以下几个结论：

(1) 利用传递函数方法与传统摄动理论相结合来求解随机结构的响应问题，为随机结构的分析开辟了一种新途径，它具有公式推导简单、易编程、边界条件适应性强等特点。

(2) 对随机正则摄动问题取不同的阶数截断（M,N 值），理论上可以获得任意阶精度的随机响应解，计算结果可以很好地描述结构的随机响应。目前该方法对复杂结构的静、动力响应问题的分析正在作相关的研究，本文对大型复杂随机结构的分析能起到抛砖引玉的作用。

(3) 相关公式的符号推算过程可借助于 Matlab、Mathematica 等具有较强符号运算能力的数学工具实现，这样可以大大减少工作量。

参考文献：

[1] B Yang，C A Tan. Transfer function of one-dimensional distributed parameter system [J]. Journal of Applied Mechanics，1992，59.

[2] Roger G Ghanem，Pol D Spanos. Stochastic Finite Elements：A Spectral Approach [M]. 北京：世界图书出版社，1990.

[3] 李杰. 随机结构系统—分析与建模 [M]. 北京：科学出版社，1996.

[4] 李海洋. 数学物理问题的数值分布传递函数方法 [D]. 国防科技大学博士学位论文，1999.

[5] 雷勇军，李海洋，周建平. 复合材料梁的分布参数传递函数法分析模型 [J]. 国防科技大学学报，1999，21 (6).

[6] 张义民，陈塑寰. 静力分析的一般摄动方法 [J]. 应用数学与力学，1995，16 (8).