国 防 科 技 大 学 学 报
第 23 卷 第 1 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.23 No.1 2001

文章编号:1001-2486(2001)01-0077-04

两个有关矩阵问题的回答*

冯良贵

(国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:讨论了两个与矩阵有关的问题。对问题 1,给出了其阶数从 1 到 5 时的回答;对问题 2,给出了其彻底的否定回答。所获的结果许多情形下还可推到更广泛的情形。

关键词:行列式;C—W 函数;相似性

中图分类号:O151.21　　文献标识码:A

The Answers of Two Questions on Matrices

FENG Liang-gui

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Two questions about matrices are discussed. One is answered, the other is answered in case its rank = 1,2,3,4,5 resp.. The results obtained in this paper can be extended in many occasions.

Key words: determinant; C – W function; similarity

在实数域上的 n 阶方阵环 $R^{n\times n}$ 中,行列式的值及矩阵的相似性占有十分重要的位置。

问题 1 (行列式值估计问题) 设 $A=(a_{ij})$,其元素 a_{ij} 要么为 $-a$,要么为 a,则 $|\det A|$ 的最大值能达到多少?

问题 2 (谱半径问题) 设 $A=(a_{ij}),a_{ij}\in \mathbf{Z}^+,\mathscr{P}=\{(a_{ij}+\varepsilon_{ij})\mid \varepsilon_{ij}>0\}$,则 A 的谱半径能否与 $\mathscr{P}$ 中的某个矩阵的谱半径相同?等价地,若 $A=(a_{ij}),a_{ij}\in \mathbf{Z}^-,\mathscr{P}=\{(a_{ij}-\varepsilon_{ij})\mid \varepsilon_{ij}>0\}$,$A$ 能否与 $\mathscr{P}$ 中的某个矩阵具有相同的谱半径?

此文中,我们给出上述第二个问题的完全回答及第一个问题阶数从 1 到 5 时的回答。与此同时,我们所获得的结果在许多情形下还可推广到更为广泛的情形。为方便计,我们引用如下记号:$(\{a_1,\cdots,a_m\})_n$ 表示元素或等于 a_1 或等于 $a_2,\cdots$,或等于 a_m 的所有 n 阶方阵构成的集合。例如:$(\{-a,a\})_n$ 表示元素要么为 a,要么为 $-a$ 的所有这种类型的 n 阶方阵集合。按照这种记法,问题 1 实际上转化为:求 $\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_n}|\det X|$ 的值。

先从最为简单的情形入手:

命题 1 (1)阶数为 1 时,$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_1}|\det X|=|a|$;

(2)阶数为 2 时,$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_2}|\det X|=2|a|^2$

证明 只须注意下面事实:$\{1,-1\}\cdot\{1,-1\}=\{1,-1\}$,而 $\{1,-1\}-\{1,-1\}=\{0,2,-2\}$.

定理 1 (1)阶数为 3 时,$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_3}|\det X|=2^2\cdot|a|^3$;

(2)阶数为 4 时,$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_4}|\det X|=2^4\cdot a^4$

证明:(1)因为 $(\{-a,a\})_3=a(\{-1,1\})_3$,所以设 $A\in(\{-1,1\})_3$,通过对 A 的每一行乘以该行第一个元素的符号函数值,同时又对 A 的每一列乘以该列第一个元素的符号函数值,得

* 收稿日期:2000-09-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目;教育部骨干教师资助计划项目
作者简介:冯良贵(1968-),男,副教授。

$$|\det A| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & A^{(1)} & \\ 1 & & \end{pmatrix}\right|，其中\ A^{(1)}\in(\{-1,1\})_2$$

进而得到 $|\det A| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & A^{(2)} & \\ 0 & & \end{pmatrix}\right|$，其中 $A^{(2)}\in(\{0,-2\})_2$.

从而有 $|\det A| = 2^2|\det A^{(3)}|$，这里 $A^{(3)}\in(\{0,1\})_2$.

但 $\{0,1\}\cdot\{0,1\} = \{0,1\}$，而 $\{0,1\}-\{0,1\} = \{0,-1,1\}$. 因此 $|\det A| = 0$ 或 2^2，进而 $\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_3}|\det X| = 2^2\cdot|a|^3$.

(2)设 $B\in(\{-1,1\})_4$，同样对 B 的每一行乘以该行第一个元素的符号函数值，同时又对其每一列乘以该列第一个元素的符号函数值，得

$$|\det B| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & & & \\ 1 & & B^{(1)} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & & & \\ 0 & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\right|，这里\ B^{(2)}\in(\{0,-2\})_3，$$

$$= 2^3|\det B^{(3)}|，B^{(3)}\in(\{0,1\})_3.$$

考察 $B^{(3)}$ 的第一列。(i)若第一列中元素全为 0 时，则 $\det B^{(3)} = 0$；否则(ii)第一列中至少有一个元素为 1。此时通过交换行，总有使其(1,1)位置上元素为 1。进一步通过初等变换，使 $B^{(3)}$ 变为 $\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & B^{(4)}\end{pmatrix}$，$B^{(4)}\in(\{0,1,-1\})_2$. 但 $\{0,1,-1\}\cdot\{0,1,-1\} = \{0,1,-1\}$，而 $\{0,1,-1\}-\{0,1,-1\} = \{0,1,-1,2,-2\}$. 故此时 $|\det B^{(3)}| = 0,1$ 或 2. 因此有：$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_4}|\det X| = 2^4a^4$.

注：从命题 1、定理 1 的证明可知：若 $X\in(\{-a,a\})_1$，则 $|\det X|$ 只能为 $|a|$；若 $X\in(\{-a,a\})_2$ 时，则 $|\det X|$ 只能为 $0,2a^2$；而若 $X\in(\{-a,a\})_3$ 时，则 $|\det X|$ 只能取值为 $0,2^2|a|^3$；最后若 $X\in(\{-a,a\})_4$ 时，$|\det X|$ 的取值只能为 $0,2^3a^4,2^4a^4$. 进一步，我们还可根据命题 1 及定理 1 的证明，分别找出与上述各值相对应的一个 X。例如：

$$a\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}，a\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}，a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

定理 2 阶数为 5 时，$\sup\limits_{X\in(\{-a,a\})_5}|\det X| = 3\cdot2^4\cdot|a|^5$.

证明：设 $X\in(\{-a,a\})_5$，则 $X = aX^{(1)}$，$X^{(1)}\in(\{-1,1\})_5$，从而 $|\det X^{(1)}| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & & \\ □ & & X^{(2)} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right| = 2^4\cdot|\det X^{(3)}|$。这里 $X^{(3)}\in(\{0,1\})_4$，若 $X^{(3)}$ 的第一列中元素全为 0，则明显 $\det X^{(3)} = 0$；否则其第一列中至少有一个为 1。交换行，使 $X^{(3)}$ 转化为 $\begin{pmatrix}1 & *\\ * & *\end{pmatrix}$. 对 $\begin{pmatrix}1 & *\\ * & *\end{pmatrix}$ 第二行起到最后一行，若该行第一个元素为 0，则此行不动，否则减去第一行。于是得：$X^{(4)} = \begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & X^{(5)}\end{pmatrix}$，其中 $X^{(5)}\in(\{0,1,-1\})_3$. 现考察 $X^{(5)}$，对 $X^{(5)}$ 的每一行乘以该行首个元素的符号函数值(规定乘 sgno 时为

乘以 1),此时,$X^{(5)}$ 转化为:$X^{(6)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$满足 a_{11},a_{21},a_{23} 均 $\in\{0,1\}$,而 $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in(\{0,1,-1\})_2$. 若 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}=0$,明显 $\det X^{(6)}=0$;否则 a_{11},a_{21},a_{31} 中至少有一个为 1。若 $a_{11}=1$,则 $X^{(6)}$ 不动,否则交换两行,使 $X^{(6)}$ 化为 $\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$,$b_{21},b_{31}$ 仍属于 $\{0,1\}$,而 $b_{12},b_{13},b_{22},b_{23},b_{32},b_{33}$ 均 $\in\{0,1,-1\}$. 对列 $\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$分别乘以 $\operatorname{sgn} b_{12}$ 及 $\operatorname{sgn} b_{13}$,于是:$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$转化为 $\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$,记之为 $X^{(7)}$. 这里 $c_{12},c_{13},c_{21},c_{31}$ 均 $\in\{0,1\}$,而 $\begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\in(\{0,1,-1\})_2$. 对行 (c_{21},c_{22},c_{33}),若 $c_{21}=0$,则不动;否则减去第一行;同样过程施行于第三行,于是得

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$X^{(8)}$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

注意到:$\{0,1,-1\}-\{0,1\}=\{0,1,-1,-2\}$,得

$$|\det X^{(7)}|=|\det X^{(8)}|,X^{(8)}=\begin{pmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}\in(\{0,1,-1,-2\})_2$$

现 $\{0,1,-1,-2\}\cdot\{0,-1,1,-2\}=\{0,1,-1,2,-2,4\}$,$\{0,1,-1,-2,2,4\}-\{0,1,-1,-2,2,4\}=\{0,-1,1,-2,2,-4,4,-3,3,-5,5,-6,6\}\cdots$ $(**)$

再次注意到:$\{0\}-\{0,1\}=\{0,-1\}$,$\{1\}-\{0,1\}=\{0,1\}$,$\{-1\}-\{0,1\}=\{-1,-2\}$. 若 $|\det X^{(8)}|=6$,则在$(**)$式中,只能是:$4+2$ 或 $-2-4$,无论怎样,$d_{22},d_{23},d_{32},d_{33}$ 中肯定有且只能有三个为 -2,而其余一个为 1。这种情况下,c_{12},c_{13} 皆只能为 1,但 $\{0,-1,1\}-\{1\}=\{-1,0,-2\}$ 不含 1,矛盾,故 $|\det X^{(8)}|\neq 6$. 类似的方法可推断 $|\det X^{(8)}|\neq 5$.

现设 $|\det X^{(8)}|=4$. 在$(**)$中只能是:(i)$4-0$,$0-4$;(ii)$2-(-2)$ 或 $-2-2$,情形 (i) 时,不妨设 $d_{22}=d_{33}=-2$,而 $d_{32}=0$. 于是 $c_{12}=c_{13}=1$,而 $c_{22}=-1=c_{33}$,$c_{21}=c_{31}=1$. 此时 $X^{(7)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & c_{23} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow a_{11}=a_{21}=a_{31}=1\Rightarrow X^{(6)}$,$X^{(6)}$无非下述四种情形之一

$$\underset{(\mathrm{I})}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & c_{23} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}},\quad \underset{(\mathrm{II})}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -c_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\quad \underset{(\mathrm{III})}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & c_{23} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}},\quad \underset{(\mathrm{IV})}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -c_{23} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

若 $X^{(6)}$ 为(Ⅰ),则$\Rightarrow X^{(5)}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$,$k_{21},k_{22}$ 异号,而 k_{31},k_{32} 同号,但 k_{31}、k_{33} 异号。由 k_{21}、k_{22} 异号$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ 中第二行的首个元素为 1。由 k_{31}、k_{33} 异号$\Rightarrow$第三行的首个元素为 1。但由于 $\{0,1\}-$

$\{0\} = \{0,1\}$，$\{0,1\} - \{1\} = \{-1,0\}$，故$\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$中(1,2)位置元素及(1,3)位置元素必有一个为 1 而另一个为 0。此时，k_{31}、k_{32}同号与$(\{0,1\} - \{0\}) \cap (\{0,1\} - \{1\}) = \{0\}$矛盾，类似地可推断其它的情形，因此$|\det X^{(8)}|$至多只能为 3，结果$\sup\limits_{X \in (\{-1,1\})_5} |\det X| \leqslant 3 \cdot 2^4$，进而有$\sup\limits_{X \in (\{-a,a\})_5} |\det X| \leqslant 3 \cdot 2^4 \cdot |a|^5$.

容易验证：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^4 \cdot 3$$

故有：

$$\sup_{X \in (\{-a,a\})_5} |\det X| = 3 \cdot 2^4 \cdot |a|^5$$

上述结果表明：(1)对于线性系统$\begin{cases} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1t}x_t = n_1 \\ \square \\ m_{t1}x_1 + \cdots + m_{tt}x_t = n_t \end{cases}$ m_{ij}, n_i均$\in \{-a, a\}$，$t = 1, \cdots, 5$，可给出其在有唯一解时，其解的所有分布情况。(2)若在$Z^{n \times n}$中考虑$|\det\{-a, a\}|$与$|\det\{-b, b\}|$的整除关系，则我们易得其阶数不超过 5 时的完整结果。

下面的定理，给出了问题 2 的完全回答。

定理 3 设$A = (a_{ij})$，$a_{ij} \in \boldsymbol{Z}^+$，$\mathscr{P} = \{(a_{ij} + \varepsilon_{ij}) | \varepsilon_{ij} > 0\}$，则$A$不能与$\mathscr{P}$中的任一矩阵有相同的谱半径。

证明 记R_+^n表$\boldsymbol{R}^n$中坐标非负的n维向量的集合，由于a_{ij}均大于 0，A为非负不可约矩阵。设$B \in \mathscr{P}$，则B仍为非负不可约矩阵。令$r_A(x)$为A的 Collatz-Wielandt 函数(即$r_A(x) = \min\limits_{x_i > 0} \left\{\frac{(Ax)_i}{x_i}\right\}$，$x \in \boldsymbol{R}_+^n$，且$x \neq 0$)，而令$E^n$为紧集$\{x \in \boldsymbol{R}_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$，则有存在$x^{(0)} \in E^n$满足：

$$r_A(x^{(0)}) = \max_{x \in E^n} \{r_A(x)\}$$

由 Perron-Frobenius 定理的证明可知：

$$\rho(A) = r_A(x^{(0)})$$

比较$r_A(x^{(0)})$及$r_B(x^{(0)})$有：

$$r_A(x^{(0)}) < r_B(x^{(0)})$$

进而$r_A(x^{(0)}) < r_B(x^{(0)}) \leqslant \max\limits_{x \in E^n} \{r_B(x)\} = \rho(B)$.

即得到$\rho(A) < \rho(B)$。故定理获证。

参考文献：

[1] Halmos P. Finite-Dimensional Vector Spaces，D. Van Nostrand Co.，Princeton，1958.

[2] Hoffman K，Kunze R. Prentice-Hall Inc.，New Jersey，1971，141 – 150.

[3] Marcus M，Minc H. On two theorems of Frobenius [R]. Pacific J. Math. 60(1975) 149 – 151.