文章编号:1001-2486(2001)01-0081-04

关于分形插值函数的积分*

屈田兴

(国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:用反例说明在[1,2]中关于分形插值函数的积分公式是错误的,并建立了关于分形插值函数积分的正确公式。

关键词 数据集;迭代函数系;分形插值函数

中图分类号:O18;O241.3 文献标识码:A

On the Integrals of Fractal Interpolating Functions

QU Tian-xing

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A counter example is giving to show that the integral formula of fractal interpolating functions in [1][2] is false. Furthermore, the correct formula is established.

Key words: data set; interated function system; fractal interpolating function

在实际中,我们常会遇到这种情形:已知某有限区间 $[a,b]$ 上的函数 F 的存在性,而不知 F 的具体表达式。为此,常对 F 的图像 $G(F)=\{(x,F(x))\mid x\in[a,b]\}$ 或其轨迹进行间隔采样,即设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

得采样数据集

$$\{(x_i,F_i)\mid i=0,1,\cdots,n\} \tag{1}$$

当 F 是光滑曲线,且采集间隔适当小时,用经典的插值方法所得的插值函数 f(即 $f\in C[a,b]$,且满足插值条件 $f(x_i)=F_i,i=0,1,\cdots,n$)常常能较好地拟合(或逼近)$F$。然而当 F 是一条分形曲线或分形集的边界形成的曲线时,由于其不规则性,经典的插值函数难以较好地拟合 F。为此,Barmsley[3,4] 提出了如下的分形插值方法:

对数据集(1),取迭代函数系 $\{R^2;S_1,\cdots,S_n\}$,其中每个 $S_i:R^2\to R^2$ 均是仿射变换,形如

$$S_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i&0\\c_i&d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_i\\f_i\end{pmatrix} \tag{2}$$

且满足

$$S_i\begin{pmatrix}x_0\\F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{i-1}\\F_{i-1}\end{pmatrix}$$

$$S_i\begin{pmatrix}x_n\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_i\\F_i\end{pmatrix} \tag{3}$$

在(3)式中,每个 S_i 的 5 个参数 a_i,c_i,d_i,e_i,f_i 中存在一个自由参数,一般取 d_i 为自由参数,称之为垂直尺度因子。一般限定

$$0\leqslant d_i<1,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

任意取定 $d_1,\cdots,d_n$ 满足(4)式,则由(2)式解得

$$a_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_n-x_0}$$

* 收稿日期:2000-09-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69872039)
作者简介:屈田兴(1957-),男,副教授。

$$c_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{x_n - x_0} - d_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0}$$

$$e_i = \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{x_n - x_0} \tag{5}$$

$$f_i = \frac{x_n F_{i-1} - x_0 F_i}{x_n - x_0} - d_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0}$$

注意在 a_i, c_i, e_i, f_i 中仅 c_i, f_i 与 d_i 的取法有关,而 a_i, e_i 与 d_i 的取法无关。

定理1 当 $n>1$ 时,对上述迭代函数系 $\{R^2; S_1, S_2, \cdots, S_n\}$,存在 R^2 上与欧氏距离 ρ 等价的距离 ρ',使 $\{R^2, S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 是 (R^2, ρ') 中的双曲迭代函数系,从而存在 R^2 中唯一的紧集 G 使

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(G)$$

即 G 是双曲迭代函数系 $\{R^2; S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 的不变集。

定理2 定理1中的 G 必是某个插值于数据集(1)的连续函数 $f:[x_0, x_n] \to R$ 的图像,即 $G = G(f)$(称这样的 f 为数据集(1)的分形插值函数)。

定理1与定理2的详细证明见文献[1,2]。为本文主要结果证明的需要,下面给出定理2的证明概要。

设

$$\mathscr{F} = \{g \mid g \in C_{[x_0, x_n]}, g(x_0) = F_0, g(x_n) = F_n\}$$

易见 $\mathscr{F}$ 是 $C_{[x_0, x_n]}$ 的完备子空间。

令 $T: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 为

$$(Tg)_{(x)} = c_i l_i^{-1}(x) + d_i g(l_i^{-1}(x)) + f_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

其中 $l_i: [x_0, x_n] \to [x_{i-1}, x_i]$ 定义为 $l_i(x) = a_i x + e_i$,它是可逆的线性变换。

易证,对 $g \in \mathscr{F}$, Tg 是满足插值条件的连续函数,且 $T: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 是压缩映射。于是由压缩映射原理知,存在唯一的 $f \in \mathscr{F}$,使 $Tf = f$,即 f 是插值于数据集(1)的连续的插值函数,且 $G(f)$ 是 $\{R^2; S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 的不变集。再由定理1中不变集 G 的唯一性得 $G = G(f)$.

说明 当取 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ 时,定理2中的 f 恰为经典的分段线性插值函数,记之为 f_0,相应于 f_0 的诸 S_i 的参数记为 a_i, c_i^0, e_i, f_i^0.

对于定理2中的 f,我们常常要计算积分 $I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. 但在文献[1,2]中给出的公式

$$I = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{7}$$

其中 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i$, $\beta = \int_{x_0}^{x_n} f_0(x)\,\mathrm{d}x$,是错误的。试看下述反例。

例1 设 $f(x) = 1 + 2x - x^2, x \in [0,2]$,则 f 是数据集 $\{(0,1),(1,2),(2,1)\}$ 的连续插值函数。取 $d_1 = d_2 = \frac{1}{4}$,则由(2)、(3)式得

$$S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

易验证

$$S_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ f(\frac{1}{2}x) \end{pmatrix}$$

$$S_2\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ f(1 + \frac{1}{2}x) \end{pmatrix}$$

于是当 x 在 $[0,2]$ 上变化时,$S_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ 产生了 $G(f)$ 位于 $[0,1]$ 上的部分,而 $S_2\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ 产生了 $G(f)$ 位于 $[1,2]$ 上的部分,从而

$$G(f) = S_1(G(f)) \cup S_2(G(f))$$

由于 $G(f)$ 是 R^2 中的紧集,故 $G(f)$ 是 $\{R^2;S_1,S_2\}$ 的不变集,因此 f 恰为所给数据集的分形插值函数。

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4},\quad \beta = \int_0^2 f_0(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

由(7)式得

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

显然,这与 Riemann 积分值 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (1 + 2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}$ 不一致,因而公式(7)是不正确的。

下面我们将给出本文的主要结果——关于分形插值函数积分的正确公式。

定理 3 设 f 是由 $\{R^2;S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 得到的插值于数据集(1)的分形插值函数,则

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{8}$$

其中 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i$,$\beta = \int_{x_0}^{x_n} f_0(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}(F_n + F_0)(x_n - x_0)$。

证明 由定理 2 的证明知

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_n} (Tf)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (Tf)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{c_i l_i^{-1}(t) + d_i f(l_i^{-1}(t)) + f_i\}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_n} a_i(c_i x + d_i f(x) + f_i)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_n} a_i(c_i x + f_i)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9}$$

记 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i$,$\beta = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_n} a_i(c_i x + f_i)\,\mathrm{d}x$,则

$$0 \leqslant \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i < \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

于是由(9)式得

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

β 的计算如下:

由(5)式得

$$c_i = c_i^0 - d_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0}, \qquad f_i = f_i^0 - d_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0}, i = 1,2,\cdots,n$$

类似于(9)式的推导并注意 $d_1 = \cdots = d_n = 0$ 得

$$\int_{x_0}^{x_n} f_0(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_n} a_i(c_i^0 x + f_i^0)\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_n} a_i\left[\left(c_i^0 - d_i \frac{F_n - F_0}{x_n - x_0}\right)x + f_i^0 - d_i \frac{x_n F_0 - x_0 F_n}{x_n - x_0}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_n} f_0(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i d_i}{x_n - x_0}\left[\frac{1}{2}(F_n - F_0)(x_n^2 - x_0^2) + (x_n F_0 - x_0 F_n)(x_n - x_0)\right] \\ &= \int_{x_0}^{x_n} f_0(x)\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}(F_n + F_0)(x_n - x_0)\end{aligned}$$

故(8)式成立。

例 2 用公式(8)计算例1中分形插值函数 $f(x)$ 的积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$。

解 $\alpha = \frac{1}{4}$

$$\beta = \int_0^2 f_0(x)\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}(F_2 + F_0)(x_2 - x_0) = \frac{5}{2}$$

由(8)式得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{10}{3}$$

说明 1 上述积分值与按积分法求得的 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值是一致的。

说明 2 在文献[1,2]中积分公式 $\int_{x_0}^{x_n} x f(x)\mathrm{d}x$ 也是错误的,用与上述类似的方法可得出 $\int_{x_0}^{x_n} x f(x)\mathrm{d}x$ 的正确的计算公式,这里不再赘述。

参考文献:

[1] 曾文曲,王向阳等. 分形理论与分形的计算机模拟[M]. 沈阳:东北大学出版社,1993.
[2] 谢和平,薛秀谦. 分形应用中的数学基础方法[M]. 北京:科学出版社,1997.
[3] Barnsley M. Fractals Everywhere [R]. Academic Press, Orlando. FL. 1988.
[4] Barnsley M. Fractals Functions and Interpolation [J]. Constructive Approximation, 1986,(2):303 – 329.