国 防 科 技 大 学 学 报
第23卷 第1期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.23 No.1 2001

文章编号：1001-2486（2001）01-0089-04

微分算子插值样条解析性质的一种新证法*

张新建[1]，童 丽[1]，唐善桂[2]

（1.国防科技大学理学院，湖南 长沙 410073；2.边防广州指挥学校，广东 广州 510660）

摘 要：讨论带线性泛函约束的微分算子插值样条，在空间 W_2^m 中给出了由约束泛函和微分算子构造再生核的普遍方法，利用微分算子及其共轭微分算子零空间基底之间的关系得到了微分算子插值样条解析性质新的推导方法。

关键词：微分算子样条；再生核；解析性质

中图分类号：O175.3 **文献标识码**：A

A New Proving Method of the Continuous Properties of Interpolating Splines of Differential Operators

ZHANG Xin-jian，TONG Li，TANG Shan－gui

（1.College of Science，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China；

2.Guangzhou Frontier Guarding Command School，Guangzhou 510660，China）

Abstract：The interpolating splines of differential operators with constrained functionals are discussed. A general method for constructing the reproducing kernel is presented，this reproducing kernel is determined by the constrained functionals and differential operators. The structual and continuous properties of the splines are derived by new methods，which dependent on the relations between the bases for the null spaces of the differential operators and their adjoint operators.

Key words：spline of differential operator；reproducing kernel；continuous property

由一般线性微分算子确定的样条，亦称为广义样条，对样条理论和应用的发展有着重要意义。设 L 为线性微分算子，L^* 为 L 的共轭算子，广义样条通常定义为按一定光滑性要求连接起来的函数类，这些函数类为方程 $L^*Lf(t)=0$ 的解，然后再开展对其内在极值性质的研究。另一方面，可将微分算子插值样条定义为满足约束条件的泛函极小问题的解，即按带约束的变分原理讨论广义样条。后一方法在理论上可更深刻揭示广义插值样条的本质属性，处理方法上更加简练，而且可更好地将算子插值样条用于最优控制[1]、概率统计[2]等方面。

由带约束的泛函极小问题定义样条后，必须在此基础上推导出插值样条所具有的连续性质（解析性质），算子插值样条在这方面的研究尚不够充分。文［3］从带约束的变分原理出发推导了三次插值样条的解析性质，这些结果被本文第一作者推广到一般微分算子样条[4]。

本文提供了另一种全新的方法讨论微分算子插值样条的解析性质。给出了再生核构造的普遍方法，并利用再生核给出了算子插值样条的投影描述，这是文［5］中定理1、定理3的推广。本文的理论与方法试图为 W_2^m 空间中样条插值算子与最佳逼近算子的一致性[6]、线性泛函的最佳逼近及高阶线性微分方程多点边值问题的近似解等一系列问题的研究提供新的基础。

1 再生核构造

设 L 为 n 阶线性微分算子

$$L = D^m + a_{m-1}(t)D^{m+1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t) \qquad t\in[a,b] \tag{1}$$

其中 $a_j(t)\in C^{m-j}[a,b]$ $(0\leqslant j\leqslant m-1)$。设函数空间 $W_2^m[a,b]=\{f(t),t\in[a,b]$：

---

* 收稿日期：2000-07-03
作者简介：张新建（1956-），男，副教授。

$f^{(m-1)}(t)$ 绝对连续，$\int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 \mathrm{d}t < \infty\}$，$W_2^0[a, b] = \{f(t), t \in [a, b]: \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t < \infty\}$。$L$ 的零空间 $N(L)$ 是 W_2^m 的 m 维子空间，再设 λ_j（$1 \leqslant j \leqslant n$，$n \geqslant m$）是 W_2^m 上 n 个线性无关的线性泛函，且设其中有 m 个（不妨设为前 m 个）在 $N(L)$ 上线性无关。

设 $x_1(t)$，…，$x_m(t)$ 是 $N(L)$ 的任意一组基，以（$\lambda_i x_1$，…，$\lambda_i x_m$）（$1 \leqslant i \leqslant m$）为第 i 行组成 m 阶方阵 P，则 P 是可逆的。令 $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t)) = (x_1(t), \cdots, x_m(t))P^{-1}$，则 $\varphi_i(t)$（$1 \leqslant i \leqslant m$）是 $N(L)$ 的与 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 对偶的基底，即

$$L\varphi_j = 0, \qquad \lambda_i \varphi_j = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m \tag{2}$$

将 $\varphi_1(t)$，…，$\varphi_m(t)$ 的 Wronskian 矩阵记为 $W(t)$，$W^{-1}(t)$ 的最后一列记为 $(\varphi_1^*(t), \cdots, \varphi_m^*(t))^{\mathrm{T}}$（上标 T 表示转置），则

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(i)}(t)\varphi_j^*(t) = \delta_{i,m-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \tag{3}$$

引理 1[6] 设 L^* 为 L 的伴随算子，则 $L^*\varphi_i^*(t) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m$。

令

$$g(t, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i^*(\tau)(t-\tau)_+^0 \tag{4}$$

其中 $(t-\tau)_+^0 = 1$ $(t \geqslant \tau)$，$(t-\tau)_+^0 = 0$ $(t < \tau)$，则从（3）式出发，通过逐次求导递推地得到

$$g^{(i,j)}(t, t) = (-1)^j \delta_{i+j, m-1}, \ 0 \leqslant i+j \leqslant m-1 \tag{5}$$

$$g^{(m-1,0)}(t+0, t) - g^{(m-1,0)}(t-0, t) = 1 - 0 = 1 \tag{6}$$

其中 $g^{(i,j)}(t, \tau)$ 表示 $\dfrac{\partial^{i+j} g(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j}$。令

$$G(t, \tau) = g(t, \tau) - \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)[\lambda_i g(\cdot, \tau)] \tag{7}$$

则由（5），（6），（7）式知

$$LG(\cdot, \tau) = \delta(\cdot - \tau), \ \lambda_i G(\cdot, \tau) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m \tag{8}$$

即 $G(t, \tau)$ 是微分算子 L 的满足 $\lambda_i G(\cdot, \tau) = 0$（$1 \leqslant i \leqslant m$）的 Green 函数[7]。

根据（8）式知，对每个 $f \in W_2^m[a, b]$，有唯一分解式

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i f)\varphi_i(t) + \int_a^b G(t, \tau)[Lf(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

因而在 W_2^m 中规定内积与范数

$$< f, g > = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i f)(\lambda_i g) + \int_a^b [Lf(t)][Lg(t)]\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\| f \|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i f)^2 + \int_a^b [Lf(t)]^2 \mathrm{d}t \tag{11}$$

可以证明 W_2^m 关于内积（10）成为 Hilbert 空间。

定理 1 Hilbert 空间 $W_2^m[a, b]$ 具有再生核

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(\tau) + \int_a^b G(t, \xi)G(\tau, \xi)\mathrm{d}\xi \tag{12}$$

证明 由（8）式知

$$LK(\cdot, \tau) = G(\tau, \cdot), \ \lambda_i K(\cdot, \tau) = \varphi_i(\tau), \ 1 \leqslant i \leqslant m \tag{13}$$

于是对每个 $\tau \in [a, b]$，由（9）式知 $K(\cdot, \tau) \in W_2^m$，且由（10）式，有

$$< f(\cdot), K(\cdot, \tau) > = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i f)\varphi_i(\tau) + \int_a^b G(\tau, t)[Lf(t)]\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{14}$$

此即证得 $K(t, \tau)$ 是 Hilbert 空间 W_2^m 的再生核，证毕。

2 微分算子插值样条的投影性质

设 r_j（$1\leqslant j\leqslant n$）是 n 个给定的实数，$V(r) = \{f\in W_2^m[a,b]:\lambda_j f = r_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$.

定义 $\zeta(t)\in W_2^m[a,b]$ 称为微分算子 L 关于泛函 $\{\lambda_j\}_1^n$ 和实数 $\{r_j\}_1^n$ 的算子插值样条，如果 $\zeta(t)$ 满足

$$\int_a^b [L\zeta(t)]^2\mathrm{d}t = \min_{f\in V(r)}\int_a^b [Lf(t)]^2\mathrm{d}t, \zeta\in V(r) \tag{15}$$

在 $W_2^0[a,b]$ 中取范数 $\| g\|_0 = [\int_a^b [g(t)]^2\mathrm{d}t]^{1/2}$，则（15）式就是 W_2^0 中的极小范数问题。研究算子插值样条通常都是从 W_2^0 中的极小范数问题出发。我们利用范数（11），知算子插值样条可描述成 W_2^m 中的极小范数问题，即

$$\|\zeta\| = \min_{f\in V(r)}\| f\|, \quad \zeta\in V(r) \tag{16}$$

在 W_2^m 中，对任意的线性无关泛函组 $\{\lambda_j\}_1^n$，形如（11）式的范数是等价的[8]，因而可设 $\{\lambda_j\}_1^n$ 关于范数（11）是连续的。设 λ_j 在 W_2^m 中的表示元为 h_j（$1\leqslant j\leqslant n$），记 $H_n = \mathrm{Span}\{h_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$。

定理 2 算子插值样条 $\zeta(t)$ 是 $V(r)$ 中任意元在 H_n 上的正交投影。

证明 任取 $f_r\in V(r)$，因 $H_n^{\perp}$ 为 W_2^m 的闭线性子空间，由投影定理，存在唯一 $\hat{f}\in H_n^{\perp}$，使得

$$\| f_r - \hat{f}\| = \min_{g\in H_n^{\perp}}\| f_r - g\|$$

且 $f_r - \hat{f}\perp H_n^{\perp}$，即 $f_r - \hat{f}\in H_n$. 又易知 $\{f_r - g: g\in H_n^{\perp}\} = V(r)$，故 $f_r - \hat{f}$ 就是极小范数问题（16）的解，也即 $\zeta(t) = f_r(t) - \hat{f}(t)$。 证毕

由（14）、（7）式，知

$$h_i(t) = \lambda_i K(\cdot,t)\ (1\leqslant i\leqslant n),\ \varphi_i(t) = h_i(t)\ (1\leqslant i\leqslant m) \tag{17}$$

根据定理 2，可以设

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) = \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i(t) + \sum_{i=m+1}^n c_i[\lambda_i K(\cdot,t)] \tag{18}$$

其中系数 c_i（$1\leqslant i\leqslant n$）可由线性方程组 $\sum_{i=1}^n c_i(\lambda_j h_i) = r_j$（$1\leqslant j\leqslant n$）确定。注意到（13）式，我们有

$$L\zeta(t) = \sum_{i=m+1}^n c_i[\lambda_i G(\cdot,t)] \tag{19}$$

将本节的结果用于文［5］的情形，则有 $h_j(t) = K(t, t_j)$，从而文［5］的定理 3 是显然的。

3 微分算子插值样条的解析性质

为了得到算子插值样条通常的解析性质，我们取 λ_i（$1\leqslant i\leqslant n$）为 EHB 泛函，即

$$\lambda_i f = \sum_{k=1}^{\gamma_i} c_{ik} f^{(k-1)}(t_i) \qquad 1\leqslant i\leqslant n \tag{20}$$

其中 c_{ik} 为常数，$c_{i\gamma_i}\neq 0$，$1\leqslant\gamma_i\leqslant m$. $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$.

引理 2 设 $\{\lambda_i\}_1^m$ 为形如（20）的泛函，则

$$\varphi_i^{*(k)}(t_i) = (-1)^k\delta_{k,m-\gamma_i}, 0\leqslant k\leqslant m-\gamma_i, 1\leqslant i\leqslant m \tag{21}$$

证明 由（2）式，有

$$\varphi_i^*(t) = \sum_{j=1}^m (\lambda_i\varphi_j)\varphi_j^*(t), 1\leqslant i\leqslant m$$

再由（20）、（5）式，得知对 $0\leqslant k\leqslant m-\gamma_i$，有

$$\varphi_i^{*(k)}(t_i) = \sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^{\gamma_i} c_{il}\varphi_j^{(l-1)}(t_i)\varphi_j^{*(k)}(t_i)$$

$$= \sum_{l=1}^{\gamma_i} c_{il} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(l-1)}(t_i)\varphi_j^{*(k)}(t_i) = (-1)^k \delta_{k,m-\gamma_i}$$ 证毕

引理3 设 $\{\lambda_i\}_1^n$ 为形如(20)的泛函，$\zeta(t)$ 为算子插值样条，记 $u(t) = L\zeta(t)$，则

$$u(t) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} (\lambda_i \varphi_j)\varphi_j^*(t)[(t_i - t)_+^0 - (t_j - t)_+^0] \tag{22}$$

证明 易知 $\lambda_{j(\tau)} g(\tau, t) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_j \varphi_i)\varphi_i^*(t)(t_j - t)_+^0$，于是由(2)式得

$$\lambda_j g(\cdot, t) = \varphi_j^*(t)(t_j - t)_+^0, \ 1 \leqslant j \leqslant m \tag{23}$$

记 $\psi_i(t) = \lambda_i G(\cdot, t)$，则根据(7)、(23)式，有

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_i \varphi_j)\varphi_j^*(t)[(t_i - t)_+^0 - (t_j - t)_+^0]$$

代入(19)式，即得(22)式 证毕

定理3 设 $\{\lambda_i\}_1^n$ 为形如(20)的泛函，$\zeta(t)$ 为算子插值样条，则

(i) $L^* L\zeta(t) = 0$，$t \neq t_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$

(ii) $L\zeta(t) = 0$，$t \in [a, t_1] \cup (t_n, b]$

(iii) $\zeta(t) \in C^{m-1}[a, b]$

(iv) $\zeta^{(2m-\gamma_k-1)}(t_k + 0) - \zeta^{(2m-\gamma_k-1)}(t_k - 0) = 0$，$1 \leqslant k \leqslant n$

证明 由引理1和(22)式，即(i)(ii)成立。

由(9)、(19)式，得

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \varphi_i(t) + \sum_{i=m+1}^{n} c_i \int_a^b G(t, \tau)[\lambda_i G(\cdot, \tau)] \mathrm{d}\tau$$

记 $\bar{\zeta}(t) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i \int_a^b G(t, \tau)[\lambda_i G(\cdot, \tau)] \mathrm{d}\tau$，则 $\zeta^{(l)}(t)$ 的连续性取决于 $\bar{\zeta}^{(l)}(t)$ 的连续性，利用(7)、(23)、(3)和(19)式，可以得到

$$\bar{\zeta}^{(l)}(t) = \begin{cases} \sum_{i=m+1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \int_{t_j}^{t} \varphi_j^{(l)}(t)\varphi_j^*(\tau)[\lambda_i G(\cdot, \tau)] \mathrm{d}\tau, & 0 \leqslant l \leqslant m-1 \\ \sum_{i=m+1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \int_{t_j}^{t} \varphi_j^{(m)}(t)\varphi_j^*(\tau)[\lambda_i G(\cdot, \tau)] \mathrm{d}\tau + L\zeta(t), & l = m \end{cases} \tag{24}$$

即知 $\bar{\zeta}(t) \in C^{m-1}[a, b]$，也即(iii)成立。且由上式和下面的证明还可知，当存在某个 $\gamma_k = m$ 时，则 $\zeta^{(m)}(t)$ 在 t_k 处不连续。

往证(iv)。当 $t_k < t \leqslant t_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ 时，由(22)式得

$$u(t) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i \varphi_j)\varphi_j^*(t)$$

从而根据(21)式，当 $l \leqslant m - \gamma_k - 1$ 时

$$u^{(l)}(t_k + 0) - u^{(l)}(t_k - 0) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i (\lambda_i \varphi_k)\varphi_k^{*(l)}(t_k) = 0$$

当 $t_k < t \leqslant t_{k+1}$ $(m+1 \leqslant k < n)$ 时，由(22)式得

$$u(t) = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} (\lambda_i \varphi_j)\varphi_j^*(t)$$

于是当 $l \leqslant m - \gamma_k - 1$ 时，由(20)和(5)式得

$$u^{(l)}(t_k + 0) - u^{(l)}(t_k - 0) = -c_k \sum_{i=1}^{\gamma_k} c_{ki} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(i-1)}(t_k)\varphi^{*(l)}(t_k) = 0$$

综上知(iv)成立。 证毕

(下转第96页)

（上接第 92 页）

参考文献：

[1] 陈关荣. Spline Approach to Optimal Control Problems with Constraints [D]. Ph. D. Dissertation，Texs A & M University，USA，1987.

[2] Kohn R，Ansley G F. A New lgorithm for Spline Smoothing Based on Smoothing a Stochastic Process [J]. SLAM J. Sci. Stat. Comput. 1987，8（1）：33 – 48.

[3] Opfer G，Oberle H J. The Derivation of Cubic Splines with Obstacles by Methods of Optimization and Optimal Control [J]. Numer. Math. 1988，52：17 – 31.

[4] 张新建. 带障碍的广义插值样条与带约束的最优控制 [J]. 应用数学学报，2000，3.

[5] 邓彩霞，邓中兴. 再生核空间中样条插值算子与最佳插值逼近算子的一致性 [J]. 高等学校计算数学学报，1995，2：119 – 128.

[6] Schumaker L L. Spline Functions：Basic Theory（Chap. 10）[M]. John Wiley & Sons，New york，1981.

[7] 李岳生. 样条与插值 [M]. 上海：上海科技出版社，1983.

[8] 张新建，H^m 空间上的一类等价范数 [J]. 湖南数学年刊，1998，18（1）：62 – 64.