国 防 科 技 大 学 学 报
第23卷 第1期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.23 No.1 2001

文章编号：1001-2486（2001）01-0093-04

测试点的选取问题*

谢 政，郁殿龙

（国防科技大学理学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：在故障检测的过程中，每个测试点检测需要的时间可能不同。本文研究了如何选取一些测试点，使得这些测试点可以检测所有故障，而所需时间最少的问题。我们将其转化成整数规划问题，并给出一个求解算法. 最后给出一个实例对算法加以说明。

关键词：检测故障；集合覆盖；整数规划

中图分类号：O221．4　文献标识码：A

The Problem of Choosing The Testing Point

XIE Zheng，YU Dian-long

（College of Science，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：During the course of testing the malfunctions，the time for each testing point to test the malfunction may be different. The paper studies the problem how to choose some testing points to test all the malfunction，which take the least testing time . We turn the problem into an integer programming. An arithmetic to the problem is given. Finally we give an example with the arithmetic.

Key words：testing malfunction；set cover；linear programming

1 模型

在检测故障过程中，设备选测试集为 $T=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，$t_j$（$j=1, 2,, n$）为测试点，每次检测所需的时间为 c_j。所需检测的故障集为 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$，$f_i$（$i=1, 2, \cdots, m$）为故障点。各个测试相互独立，且每个测试只有“正常”、“异常”两种情况，分别用“1”和“0”表示。布尔矩阵 $\boldsymbol{R}_{FT}=(r_{ij})_{mxn}$为稀疏矩阵，表示集合 T 和 F 的关系矩阵，其中 $r_{ij}=1 \Leftrightarrow t_j$可以检测$f_i$。找一个算法，满足 T 中一些测试点可以检测所有的故障点，并且所需时间最少。

定义1 对于任意的 $t_j \in T$，称 $N(t_j)=\{f_i \mid r_{ij}=1, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 为 t_j 可检测的故障集。

定义2 设 $J=\{1, 2, \cdots, n\}$，若 $J^* \subseteq J$，满足 $\bigcup\limits_{j \in J^*} N(t_j)=Y$，则称 J^* 覆盖 Y，或 J^* 为 Y 的一个覆盖。

由以上假设原问题可看作取 Y 的一个覆盖 J^*，即 $\bigcup\limits_{j \in J^*} N(t_j)=Y$，且 $\sum\limits_{j \in J^*} c_j$ 最小. 给定 $J^* \subseteq J$，则可定义一个 n 维 $0-1$ 向量 $\boldsymbol{x}(J)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 如下：

$$x_j=\begin{cases}1, & j \in J^* \\ 0, & j \notin J^*\end{cases}$$

反之，给定一个 n 维 $0-1$ 向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，则可定义集合 $J^*=\{j \mid x_j=1, 1 \leqslant j \leqslant n\} \subseteq J$。

设 $J^* \subseteq J$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_{FT}$，则当 J^* 是 Y 的一个覆盖时，有 $\bigcup\limits_{j \in J^*} N(t_j)=Y$，从而对于任意 $f_i \in Y$，存在 $j \in J^*$，使得 $f_i \in N(t_j)$，即对于任意 i，存在 $j \in J^*$，$r_{ij}=1$，且 $x_j=1$，则对于任意 i，存在 $j \in J^*$，$a_{ij}=1$，且 $x_j=1$，即对于任意 i 有$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 1$，得到 $\boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{J}^*) \geqslant 1$。

* 收稿日期：2000-09-28
作者简介：谢政（1960-），男，教授。

反之，对于一个 n 维 0－1 向量 $\boldsymbol{x}$，满足 $A\boldsymbol{x}\geqslant 1$，逆推回去，则有向量 $\boldsymbol{x}$ 所定义的集合 J^* 是 Y 的一个覆盖。

设 J^* 是 Y 的一个覆盖，则 J^* 中所有测试点检测故障点所需时间为 $\sum_{j\in J^*} c_j$，设时间向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$J^*$ 所需时间为 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(J^*)$。

在上述假设下，该问题可以化为如下整数线性规划问题（CP）：

$$\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{1},\boldsymbol{x}\text{ 为 } 0-1 \text{ 向量}\}$$

其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}>0$，$\boldsymbol{1}=(1,1,\cdots,1)^T$，

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad x_j=\begin{cases}1, & j\in J^*\\ 0, & j\notin J^*\end{cases}$$

定义 3　设 J^* 是 Y 的一个覆盖，若 $\exists j\in J^*$，使得 $J^*\setminus\{j\}$ 仍是一个覆盖，即 $\sum_{k\in J^*\setminus\{j\}} a_{ik}\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,m$，则 j 称为过剩指标. 不含过剩指标的覆盖称为极小覆盖。

显然，指标 k 不是 J^* 的过剩指标的等价条件为

$$I(k)=\{i\mid \sum_{j\in J^*\setminus\{k\}} a_{ij}=0\}\neq\varnothing$$

因为 $\boldsymbol{c}>0$，则覆盖问题的最优解对应一个极小覆盖，然而对于一个极小覆盖则不一定是最优解。

定义线性规划问题（CP）′为 $\min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}\geqslant 1,\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$，设 $\tilde{x}$ 是（CP）′可行解，由于 A 是 0－1 矩阵，$\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$，$x'_j=\min\{1,\tilde{x}'_j\}$，$j=1,2,\cdots,n$，也是（CP）′的可行解，所以对（CP）′的最优解 x^* 有 $0\leqslant x_j^*\leqslant 1$。

设（CP）′最优解为 $\tilde{x}^*$，对应于 $\tilde{x}^*$ 定义向量 $\bar{x}^*$ 如下：$\bar{x}_j^*=\lceil \tilde{x}_j^*\rceil$，$j=1,2,\cdots,n$，则 $\bar{x}^*$ 是（CP）问题的可行解。记 $\bar{J}^*=\{j\mid \tilde{x}_j^*=1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$，则 $\bar{J}^*$ 是 Y 的一个覆盖，但不一定是极小覆盖，从 $\bar{J}^*$ 中逐个去掉过剩指标后，可得极小覆盖 J^*，但并不一定唯一。

2　算法

在建立（CP）问题算法前，先将其简化，通过一些删除检验，从 A 中删除某些行和列来减少变量和约束的数目，从而使问题简化：

（1）若 A 的某行是一个单位向量，例如 $a_{ik}=1$，$a_{ij}=0$，$j\neq k$，则可行解中 x_k 必为 1，于是第 k 列可以删去，并且可以删去第 k 列中元素为 1 的行；

（2）若 A 中 a_t 和 a_p 两行有 $a_t\geqslant a_p$，则第 t 行可以去掉；

（3）若有 A 中的某些列指标集 S，以及某个列指标 $k\neq S$，满足 $\sum_{j\in S}a_{ij}\geqslant a_{ik}$，$i=1,2,\cdots,m$。且 $\sum_{j\in S}c_j\leqslant c_k$，则第 k 列可以删去。

下面给出本问题的割平面算法：

Step1　删除检验（CP）问题和约束条件。如果 A 中有一行为零向量，则问题无解，否则用问题简化的方法检验（CP）问题的矩阵 A 和约束条件。转入 Step2。

Step2　给出一个初始覆盖 J_0，不妨设为 $J_0=X$。

令 $x_0=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(J_0)=\sum_{j=1}^{n}c_j$，原问题（CP）记为（$\mathrm{CP}_1$），$k=1$，转入 Step3。

Step3　求（CP_1）′最优解 $\tilde{x}^*$，并通过 $\tilde{x}^*$ 求出一个极小覆盖 J^*，其对应的 0－1 向量为 x^k。如果 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^k<x_0$，则将 $J^*\to J$，$x_0=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^k$，转入 Step4，否则，直接转入 Step4。

Step4　考虑规划问题 $\min\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，满足 $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 $m\times m$ 的单位矩阵。

对于极小覆盖 J^*，经过适当换行和列的次序将矩阵 A 和 $\boldsymbol{c}$ 排列如下形式：

$$\boldsymbol{c}=(c_{J^*},C_N)$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & A_{12} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ A_{21} & & A_{22} & \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} I_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\quad \underbrace{\qquad}_{J^*\text{的列}} \quad \underbrace{\qquad}_{\text{非}J^*\text{的列}}$$

基矩阵为

$$B(J^*)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ A_{21} & & & & & -1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix},$$

$$\quad \underbrace{\qquad}_{J^*\text{的列}} \quad \underbrace{\qquad}_{\text{非}J^*\text{的列}}$$

令 $Q=\{j \mid cJ^* p_j-c_j>0,\ j\in N\}$，若 $Q=\varnothing$，则算法停止，此时记下 $x(J^*)$ 为最优解．否则转入 Step5。

Step5 由线性规划的知识可知，对于 J，J^* 是两个不同的极小覆盖，若 $c^{\mathrm{T}}x(J^*)<c^{\mathrm{T}}x(J)$，则 $x(J)=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$，必须满足 $\sum_{j\in Q}x_j^*\geqslant 1$。

令 $\sum_{j\in Q}x_j^*\geqslant 1$ 为极小覆盖 J 的割平面。

$\min\ \{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax\geqslant 1,\ \sum_{j\in Q}x_j^*\geqslant 1,\ x$ 为 $0-1$ 向量$\}$ 仍然是一个（CP）问题，用它代替原来的问题，置 $k=k+1$，转入 Step3。

由于每增加一个割平面后，至少割去（CP）问题的一个覆盖，因此程序在有限步内终止．

3 算 例

下面给出一个具体的实例来说明前面的算法．有七个测试点和七个故障点，关系矩阵如下，每次测试所需的时间为 $c=(7,3,7,12,6,4,2)^{\mathrm{T}}$。如何选取测试点使得所需的时间最少。

$$R_{FT}=\begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

解：将上述矩阵删除检验得到新的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

而且 $x_6=0$，$x_7=1$.

得到新的覆盖问题 $\min\ \{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}$，其中 $c=(7,3,7,12,6)^{\mathrm{T}}$。考虑规划问题 $\min c^{\mathrm{T}}x$，满足 $Ax-Iy=1$，$x\geqslant\mathbf{0}$，$y\geqslant\mathbf{0}$，其中 I 表示 3×3 的单位矩阵。

令初始覆盖为 X，设 $x_0=\sum_{j=1}^{5}c_j=35$，原问题（CP）记为（CP_1），求得（CP_1）′的一个最优解为 $x=(x_1,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}=(1/2,1,1/2,0,1/2)^{\mathrm{T}}$，令 $x'=(1,1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，由 x' 可以产生三个极小覆盖，取 $x^1=(1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 17$，可得 $Q = \{j \mid cJ^{*} p_j - c_j > 0，j \in N\} = \{5\}$，割平面为 $x_5 \geqslant 1$。

在（CP_1）中增加约束 $x_5 \geqslant 1$，记为（CP_2），求得（CP_2）$'$的一个最优解为 $\boldsymbol{x} =$（1/2，1，1/2，0，1）^{T}，令 $\boldsymbol{x}' =$（1，1，1，0，1）$^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{x}'$可以产生两个极小覆盖，取 $\boldsymbol{x}^2 =$（1，1，0，0，1）^{T}，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^2 = 16$. 令 $x_0 = 16$。此时可得

$$Q = \{j \mid cJ^{*} p_j - c_j > 0, j \in N\} = \varnothing$$

故 $\boldsymbol{x}^2$ 为最优覆盖解，需要时间为 16。而对于原问题，最优覆盖解为（1，1，0，0，1，0，1）$^{\mathrm{T}}$，此时所需的时间为 18.

参考文献：

[1] 陈庆华，谢 政. 整数规划［M］. 长沙：国防科技大学出版社，1992.

[2] 马仲蕃. 线性整数规划的数学基础［M］. 北京：科学出版社，1995.