

文章编号: 1001-2486(2001)01-0102-03

## 平面内一组线段相对于线光源的可见性\*

欧新良

(长沙大学计算机与数学系, 湖南长沙 410003)

**摘要:** 给定平面内一组互不相交的线段, 将实际光源抽象成有限长度线光源, 讨论其可见性, 发现线光源的照射效果等价于线光源两端点的照射效果叠加, 给出了寻找所有可见边的算法, 推广了文[1]的结论。

**关键词:** 计算几何; 线光源; 可见性

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A

## Visibility for a set of Segments Based on Linear Light Source in the Plane

OU Xin-Liang

(Department of Computer &amp; Maths, Changsha University, Changsha 410003, China)

**Abstract:** For a set of  $m$  segment in the plane, we abstract the real light source into the linear light source with limited length. Its visibility is discussed, and the fact is found that the linear light source is equal to the superposition of the two linear light source endpoints' doing. An algorithm for looking for all visible edges is given and the algorithm in paper [1] is extended.

**Key words:** computational geometry; linear light source; visibility

计算几何、计算机图形学、图像处理等领域中常常需要求图形的可见边。许多情况下, 图形可见性问题需要转化为线段的可见性加以解决, 文[1]作者讨论了平面内一组互不相交的线段相对于某点的可见性问题, 并利用平面扫描技术, 给出了时间复杂度为  $O(m \log m)$  的算法, 证明了该问题的时间复杂度下界是  $O(m \log m)^{1,3}$ 。其实最接近实际光源的不是点而是线段, 即有限长度的线光源, 如日光灯等。本文即讨论平面内一组互不相交的线段相对于线光源的可见性, 推广了文[1]的结论。

## 1 准备知识

本文限定, 平面内点  $P$  在  $xoy$  坐标系中的横坐标和纵坐标分别用  $x(p)$  和  $y(p)$  表示,  $pq$  表示平面内点  $p$  到  $q$  的有向线段,  $d(p, q)$  表示平面内两点  $p$  与  $q$  间的欧几里德距离。

**定义1** 线光源 实际光源在平面上的照射等价于一直线段光源的照射效果, 此直线段称为线光源。不妨设为  $ZZ'$ 。

**定义2** 给定平面内一组互不相交的线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  及一点  $Z$ , 点  $v \in s_i$  相对于  $Z$  点可见, 若  $VZ$  与  $s_j (j \neq i)$  均不相交。平面内一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  相对于  $Z$  点的可见边用  $V\{s_1, s_2, \dots, s_m, Z\}$  表示。如图1。

为描述方便, 不妨假定  $Z$  点与  $xoy$  坐标系原点一致, 否则可作变换实现。

**定义3** 给定平面一组内互不相交的线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  及一直线段  $ZZ'$ , 点  $v \in s_i$  相对于  $ZZ'$  可见, 若  $ZZ'$  上任一点  $u$  与点  $v$  相连的线段  $uv$  与  $s_j (i \neq j)$  均不相交。平面内一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  相对于  $ZZ'$  的可见边用  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, ZZ')$  表示。如图2。

**定理1** 给定平面内两条互不相交的线段  $S_i$  和  $S_j (i \neq j)$ ,  $S_i$  相对于  $ZZ'$  遮挡  $S_j$ , 当且仅当:

(1) 对  $ZZ'$  上任一点, 存在过该点的射线与  $s_i$  和  $s_j$  都相交。

\* 收稿日期: 2000-11-09  
基金项目: CAD/CG 国家重点实验基金资助 (A09)  
作者简介: 欧新良 (1965-), 男, 讲师, 硕士。

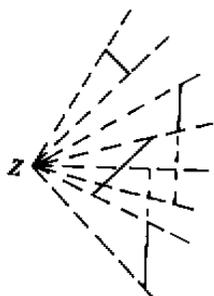


图 1 相对于点光源的一组线段

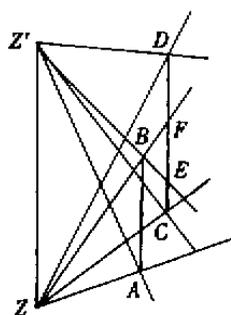


图 2 相对于线光源的一组线段

Fig.1 The line segments based on point light source

Fig.2 The line segments based on linear light source

(2) 设  $\ell$  与  $s_i$  和  $s_j$  的交点分别是  $v_i$  和  $v_j$ , 则  $d(Z, v_i) < d(Z, v_j)$

根据定理 1, 若一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  与一条由  $ZZ'$  上某点发出的射线相交, 在该方向上, 只有距离最小的线段可见。改变射线的方向, 可见线段可能随之改变。

经研究分析发现, 有限长度线光源照射下互不相交线段组中可见线段只由两个端点  $Z$  和  $Z'$  决定, 即有限长度线光源的照射效果与线光源两端点的照射效果相同。在两端点  $Z$  和  $Z'$  照射下的可见线段由分别在  $Z$  照射下产生的可见线段和在  $Z'$  照射下产生的可见线段组成, 于是问题转化为, 只要求出在  $Z$  点光源下可见线段集  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z)$  和在  $Z'$  点光源下可见线段集  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z')$ , 则相对于线光源  $ZZ'$  的可见线段集  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, ZZ') = V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z) \cup V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z')$

相对于点  $Z$  的可见性, 可以发现, 一条线段可能跨连续两个及以上区间, 其遮挡关系只有遇到线段的始点和尾点时才能改变, 可以采用平面扫描法找出所有可见线段。

定义 4 给定平面内互不相交线段  $s_i$  和  $s_j$  ( $i \neq j$ ), 若由  $Z$  点发出的一条射线  $\ell$  与  $s_i$  和  $s_j$  都相交, 则称  $s_i$  和  $s_j$  是关于  $\ell$  可比较的。设  $\ell$  与  $s_i$  和  $s_j$  的交点分别为  $v_i$  和  $v_j$ , 若  $d(Z, v_i) < d(Z, v_j)$ , 称  $s_i$  在射线  $\ell$  处遮挡  $s_j$ , 记作  $s_i <_{\ell} s_j$ 。

线段的  $<_{\ell}$  可比较性表明其间存在遮挡关系。由于线段不相交,  $<_{\ell}$  关系是可传递的, 因而  $<_{\ell}$  是全序关系。若用一条过  $Z$  点的射线扫描整个平面, 只有遇到线段的始点和尾点时才能改变这种关系。

- (1) 遇到一条线段  $S$  的始点时,  $S$  进入全序关系;
- (2) 遇到一条线段  $S$  的尾点时,  $S$  离开全序关系。

平面扫描法的基本思想是: 用一条扫描线按逆时针方向扫描整个平面, 当扫描到线段的始点或尾点时, 根据不同的情况进行插入或删除, 并输出可见线段。平面扫描法采用两种基本数据结构: 扫描线状态  $sls$  和事件表  $eps$ 。

$sls$  存放某时刻扫描线与线段的交点信息, 描述线段间的  $<_{\ell}$  次序关系。  $eps$  存放扫描线要经过的事件点, 即线段的始点和尾点  $sls$  支持以下三个操作:

- (1) INSERT ( $s, sls$ ), 将线段  $s$  插入  $sls$ ;
- (2) DELETE ( $s, sls$ ), 将线段  $s$  从  $sls$  中删除;
- (3) MIN ( $sls$ ), 找出  $sls$  中与扫描线交点到  $Z$  点的距离最小的线段, 即可见线段。

$eps$  支持 MIN ( $eps$ ) 操作。

扫描从线段中极角最小的始点或尾点开始, 扫描过程中,  $sls$  顶上的线段总是可见的。若扫描线扫描到线段的始点和尾点, 其操作规则如下 (如图 1):

- (1) 扫描到线  $s_i$  的始点。若  $s_i$  遮挡  $sls$  顶上的线段  $s_j$ , 求  $s_j$  与扫描线的交点  $v_j$ , 输出  $s_j$  的始点到  $v_j$  间的部分可见线段, 并修改  $s_j$  的始点为  $v_j$ , 然后将  $s_i$  插入  $sls$ ; 若  $s_i$  不遮挡  $sls$  顶上的线段  $s_j$ , 直接将  $s_i$  插入  $sls$ ;

- (2) 扫描到线段  $s_i$  的尾点。若  $s_i$  是  $sls$  顶上的线段, 输出  $s_i$ , 并将其从  $sls$  中删除。设  $s_i$  删除后

$s_l s$  顶上的线段为  $s_j$ , 其与扫描线的交点为  $v_j$ , 修改线段  $s_j$  的始点为  $v_j$ ; 若  $s_i$  不是  $s_l s$  顶上的线段, 直接将其从  $s_l s$  中删除。

## 2 算法与分析

下面用  $s(s_i)$  和  $t(s_i)$  分别表示线段  $s_i$  的始点和尾点,  $\text{INTERSECT}(ZP, s_i)$  表示扫描到点  $p$  时, 扫描线与线段  $s_i$  的交点, 可见, 线段存放于数组中。输出可见线段用  $\text{ADD}(s_i, vs)$  表示, 将线段的始点和尾点放入数组  $vs$  中。

算法1 求一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  相对于  $Z$  点的可见边  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z)$

输入: 一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$

输出:  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z)$ , 放入数组  $VS$  中,

step1 将线段的始点和尾点按极角排序, 由小到大放入  $eps$

step2  $s_l s = \Phi$

step3 若  $eps = \Phi$  结束, 否则  $p = \text{MIN}(eps)$ . 若  $p$  是线段  $S_i$  的始点, 转 step4, 若  $p$  是线段  $s_i$  的尾点, 转 step5

step4  $s_j = \text{MIN}(s_l s)$ ,  $v_j = \text{INTERSECT}(Zp, s_j)$ ,  $\text{INSERTF}(s_i, s_l s)$ , 若  $s_i$  遮挡  $s_j$ ,  $\text{ADD}(s_l s_j, v_j, vs)$ , 修改  $S_j$  的始点为  $v_j$ , 转 step3

step5  $\text{DELETE}(s_i, s_l s)$ ,  $s_j = \text{MIN}(s_l s)$ ,  $v_j = \text{INTERSECT}(ZP, S_j)$ , 若  $s_i$  原来遮挡  $s_j$ ,  $\text{ADD}(s_i, vs)$ , 修改  $s_j$  的始点为  $v_j$ , 转 step3

算法2 求一组线段  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  相对于线光源  $ZZ'$  的可见边  $V(s_1, s_2, \dots, s_m, ZZ')$

step1 调用算法1求得  $VS = \{V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z)\}$

step2 调用算法1求得  $V'S = \{V(s_1, s_2, \dots, s_m, Z')\}$

step3  $VV'S = VS \cup V'S$

其中  $VV'S$  为  $\{V(s_1, s_2, \dots, s_m, ZZ')\}$

算法1的时间复杂度为  $O(m \log m)$ , 因此算法2的时间复杂度为  $O(m \log m)$

以图2为例, 线光源  $ZZ'$ , 线段组  $\{AB, CD\}$ , 利用算法2求可见边  $V(AB, CD, ZZ')$ , 初始态:  $eps = \{A, C, B, D\}$ , 算法2结束后输出结果为,  $VV'S = \{AB, DF, FE\} = \{AB, DE\}$

## 3 结束语

本文将实际光源抽象成有限长线光源, 利用文[1]的思想和算法, 解决了平面内一组互不相交的线段相对于实光源的可见性问题, 推广了文[1]的结论。

## 参考文献:

- [1] 曲吉林. 平面内一组线段的可见性[J]. 计算机应用与软件, 2000.4.
- [2] Dean J A, Sack J R. Efficient hidden - line elimination by capturing winding information, Proc, 23st, Allerton Conference on Communication, [J]. Control and Computing, 1985, 207 - 221.
- [3] Seck J R, Suri S. An optimal algorithm for computing weak visibility of a polygon [J]. IEEE Trans. Computers, 1990, C - 39 (10): 1213-1219.
- [4] Lee S - H, Chwa K - Y. Some chain visibility problems in a simple polygon [J]. Algorithmica, 1990 (5): 485-507.
- [5] Lee D - T, Shamos M I. Display of visible edges of a set of convex polygons [A]. In: Toussaint G. T., Computational Geometry, North - Holland, 1985, 249-265.
- [6] Preata F P, Shamos M I. Computational Geometry - An Introduction [C]. Springer, Verlay, 1985.
- [7] Aho A V, Hopcroft J E, Vllman J D. The Design and Analysis of Computer Algorithms [M]. Addison - wesley, 1974.
- [8] 陈润民. 计算机绘图原理及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [9] 方遼, 朱国庆. 圆的等面积生成与逼近 [J]. 计算机应用与软件, 1996, 3.

