

文章编号: 1001-2486 (2001) 02-0012-06

卫星轨道 Kalman 滤波稳健估计*

文援兰¹, 王威¹, 杨元喜²

(1. 国防科技大学机电工程与自动化研究所, 湖南长沙 410073; 2. 西安测绘研究所, 陕西西安 710054)

摘要: 卫星观测数据中不可避免地存在着粗差, 一般的 Kalman 滤波易受观测粗差的影响。首先推导 Kalman 滤波稳健估计公式, 并分析了它的稳健性。然后用 Kalman 滤波稳健估计对 Lageos 卫星的激光实测资料进行了处理, 证明它具有明显的抗粗差的能力和稳健性。

关键词: Kalman 滤波; 稳健估计; 卫星轨道确定

中图分类号: V421+1 文献标识码: A

Robust Kalman Filtering for Satellite Orbit Determination

WEN Yuan-lan¹, WANG Wei¹, YANG Yuan-xi²

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China)

Abstract: Kalman filtering is affected by the gross error that is inevitable in the observation of satellite. First robust kalman filtering is derived and its robustness is analyzed, then the observations of Lageos is processed. It verifies that robust kalman filtering has the capability to resist the gross error.

Key words: Kalman filtering; robust estimation; satellite orbit determination

Kalman 滤波在 20 世纪 60 年代初一经提出, 立即受到工程界, 特别是空间技术和航空界的高度重视。应用 Kalman 滤波算法进行卫星轨道精密确定, 必须首先构造可靠的卫星动力学模型和可靠的观测模型以及合理的估计方法。

卫星运动受各种摄动力的影响, 一般难以确保其规则运动, 因而构造精确的动力学函数模型十分困难; 随机模型的构造一般都是基于验前统计信息, 而任何统计信息都难免不失真。于是提出了多种利用观测信息和卫星运动状态估值更新先验信息和补偿卫星动力学方程误差的方法, 如自适应 Kalman 滤波算法, 其中的模型方差自适应补偿法^[1]是在 Kalman 滤波过程中, 利用观测信息自适应地生成模型误差的协方差矩阵, 使预测残差与其相应的统计量保持良好的一致性。另一种开窗逼近法^{[2][3]}是利用新息序列的自适应估计 (IAE 即 innovation-based adaptive estimation), 即要求观测方程协方差阵及状态误差协方差阵随时自适应于观测信息^{[4][5]}。这种自适应滤波一般称为 Sage 滤波, 它采用前 m 步残差序列估计观测向量的协方差阵和状态误差协方差阵^[3]。近年许多学者提出了利用稳健估计自适应地求解观测权阵和状态权阵^{[6][8]}。

然而利用观测信息自适应地补偿卫星动力学方程误差, 都是基于可靠的观测模型, 即卫星的状态和动力学方程都依赖于观测信息。目前卫星跟踪观测的手段很多, 信息量大, 其中难免存在着大量的粗差 (Gross error)。观测信息一旦失真, 对卫星动力学方程进行补偿, 反而加大了动力学方程误差, 还可能使 Kalman 滤波发散。若在观测信息中存在有色噪声 (是一个马尔柯夫序列或高斯 - 马尔柯夫序列), 则可以用扩充状态的办法来处理^[10]。对于粗差, 由于它不是自相关的, 不可用扩充状态的方法。而用传统的粗差剔除方法比较困难, 这就需要合理的估计方法。

本文讨论 Kalman 滤波稳健估计。稳健估计是在粗差不可避免的情况下, 选择适当的估计方法或适当的等价权函数使参数估值尽可能地减免粗差的影响, 得出正常模式下的最佳估值。本文推导了

* 收稿日期: 2000-10-11

基金项目: 国家杰出青年科学基金 (49825107) 国家自然科学基金 (10072076) 和航天高技术青年科学基金资助项目

作者简介: 文援兰 (1965-), 男, 博士生。

Kalman 滤波稳健估计公式，分析了它的抗粗差的能力，并用它对 Lageos 卫星的激光实测资料进行了处理，证明它具有明显的抗粗差的能力和稳健性。

1 稳健估计模型

设观测方程为

$$Y = HX + V \quad (1)$$

式中 H 为设计矩阵， $H = [h_1^T, h_2^T, \dots, h_m^T]^T$ ， Y 为观测向量， $Y = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_m^T]^T$ ， V 为残差向量， $V = [v_1^T, v_2^T, \dots, v_m^T]^T$ ， X 为 n 维状态向量，是待估参数。

在一般情况下，假设观测残差向量具有下列统计特性

$$\begin{aligned} E[v_j] &= 0 \\ E[v_i v_j] &= \sigma_i^2 \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

式中 σ_i^2 为观测值的方差。 δ_{ij} 为 Kronecker 记号：当 $i = j$ 时， $\delta_{ij} = 1$ ；当 $i \neq j$ 时， $\delta_{ij} = 0$ 。

令先验方差矩阵为 $R = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2]$ ，则 (1) 式的最小二乘解为

$$\hat{X} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} Y \quad (3)$$

在实际情况下，残差 V 并不满足 (2) 式的条件， V 中含有大量的粗差。为了克服粗差的影响，我们引进稳健估计理论，按稳健 M 估计原理^[8, 19]，取极值准则函数为

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i^{-2} \rho(v_i) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{-2} \rho(y_i - h_i X) = \min$$

常用的 $\rho(v_i)$ 函数是对称的、凸的或在正半轴上非降的函数。上式对 X 求导，并令其为零，令 $\rho(v_i)$ 函数

对 v_i 的偏导数为 $\psi(v_i)$ ，又令 $w_i = \psi(v_i)/v_i = \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v} / v_i$ ，则有

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i^{-2} \psi(v_i) h_i = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{-2} w_i h_i v_i = 0 \quad (4)$$

令等价方差的平方倒数和等价方差的逆矩阵分别为

$$\bar{\sigma}_i^{-2} = \sigma_i^{-2} \cdot w_i \quad (5)$$

$$\bar{R}^{-2} = \text{diag}(\bar{\sigma}_1^{-2}, \bar{\sigma}_2^{-2}, \dots, \bar{\sigma}_m^{-2}) \quad (6)$$

w 称为等价权函数。(4) 式可写为 $H^T \bar{R}^{-2} V = 0$ ，顾及 (1) 式有

$$X = (H^T \bar{R}^{-2} H)^{-1} H^T \bar{R}^{-2} Y \quad (7)$$

稳健估计的稳健性、优效性主要取决于所使用的 ρ 函数或 w 函数，而 ρ 函数或 w 函数的选择应由观测数据的结构来决定。对卫星观测数据可采用下面的方法确定 ρ 函数或 w 函数。

(1) Huber 法^[8, 19]

$$\rho(v_i) = \begin{cases} v_i^2/2 & |v_i| \leq k\sigma_{v_i} \\ k|v_i| - k^2/2 & |v_i| > k\sigma_{v_i} \end{cases} \quad (8)$$

$$w_i = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq k\sigma_{v_i} \\ k/|v_i| & |v_i| > k\sigma_{v_i} \end{cases} \quad (9)$$

式中 σ_{v_i} 为残差的均方差。Huber 估计的 ψ 函数是最小二乘估计(中间部分)和中位数估计(两尾部分)的组合，当 $k = 0$ 时，Huber 估值退化为中位数，当 $k = \infty$ 时，Huber 估值变为最小二乘估值。

(2) IGG III 方案^[8, 19]

ρ 函数对 v_i 的偏导数 $\psi(v_i)$ 和 w_i 函数为

$$\psi(v_i) = \begin{cases} v_i & |v_i| \leq k_0\sigma_{v_i} \\ k_0((k_1 - |v_i|)(k_1 - k_0))^2 & k_0\sigma_{v_i} < |v_i| \leq k_1\sigma_{v_i} \\ 0 & |v_i| > k_1\sigma_{v_i} \end{cases} \quad (10)$$

$$w_i = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq k_0 \sigma_{V_i} \\ \alpha_i & k_0 \sigma_{V_i} < |v_i| \leq k_1 \sigma_{V_i} \\ 0 & |v_i| > k_1 \sigma_{V_i} \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\alpha_i = d_i^2 \cdot k_0 / |v_i|$, $d_i = (k_1 - |v_i|) / (k_1 - k_0)$, $0 \leq w_i \leq 1$, $0 \leq d_i \leq 1$; k_0 和 k_1 可分别取 1.5 ~ 2.5 和 3.0 ~ 5.0。

IGG III 方案采用三段法, 即正常段采用最小二乘估计, (以提高估值效率), 对可用观测采用 α_i 降权。 α_i 中的 $k_0 / |v_i|$ 类似于 L_1 范数的权函数, d_i 是在 [0, 1] 之间变化的因子, 当 $|v_i|$ 达到淘汰界 $k_1 \sigma_{V_i}$ 时, $d_i = 0$; 当 $|v_i|$ 位于正常界 $k_0 \sigma_{V_i}$ 时, $d_i = 1$ 。对可用观测 d_i 总是小于 1。这样, 等价方差倒数 \bar{R}_i^{-1} 总是在最小二乘估计方差倒数 R_i^{-1} 和淘汰方差倒数 $\bar{R}_i^{-1} = 0$ 之间变化, $|v_i|$ 越大, \bar{R}_i^{-1} 越小。这种估计方案能充分利用有效观测, 限制利用可用观测, 排除有害粗差影响, 得到正常模式下的最佳估值。

(3) 丹麦法^{[8][9]}

丹麦法有许多种, 现列出所使用的一种

$$w_i = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq k \sigma_{V_i} \\ 1 / \exp[(v_i/k)^2 - 1] & |v_i| > k \sigma_{V_i} \end{cases} \quad (12)$$

后面将讨论丹麦法对于 Kalman 滤波稳健估计的适应性。

2 Kalman 滤波稳健估计模型

设卫星动力学方程

$$\mathbf{X}_k = \Phi_{k, k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \Delta_k \quad (13)$$

式中 \mathbf{X}_k 与 (1) 式中的 X 相同, $\Phi_{k, k-1}$ 为 $n \times n$ 维状态转移矩阵, Δ_k 为状态噪声向量。利用 (13) 式, 可构成状态误差方程

$$\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \hat{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k - \Phi_{k, k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (14)$$

式中 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 为待估状态向量, $\bar{\mathbf{X}}_k$ 为由 (13) 式得到的状态向量预报值。

t_k 时刻的观测模型与 (1) 相同, 为

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_k + \mathbf{V}_k \quad (15)$$

\mathbf{V}_k 中含有粗差, 设

$$\mathbb{E}(\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k}^T) = 0 \quad (16)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_j}^T) = \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbb{E}(\mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_j}^T) = 0 \quad (k \neq j) \quad (17)$$

则基于观测误差方程 (15) 和状态误差方程 (14) 可构造如下极值条件^{[8][9]}

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{-2} \rho(v_i) + \frac{1}{2} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k}^T \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k}^{-1} \mathbf{V}_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \min \quad (18)$$

$\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k}$ 为状态协方差矩阵的预报值。(18) 式对 $\hat{\mathbf{X}}$ 求导数, 并令其为零, 经过推导可得

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{X}}_k) \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{H}_k^T + \bar{\mathbf{R}}_k)^{-1} \quad (20)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{X}}_k} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \quad (21)$$

我们可看出, Kalman 滤波稳健估计与一般的 Kalman 滤波只在于观测方差矩阵 \mathbf{R}_k 和等价方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}}_k$ 的不同, 起关键作用的是 ρ 函数或等价权函数 w 。由 (6) 和 (5) 得等价方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}}_k$

$$\bar{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2 / w_i \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \text{diag}(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2, \dots, \bar{\sigma}_m^2) \quad (23)$$

由 (22) 和 (23) 式可看出, 当残差 v_i 达到可信的边界时, 等价方差矩阵对角线元素增大 (20)

式滤波增益矩阵 \bar{K}_k 将减小 (19) 式基于测量而作的修正减小, 从而降低了测量粗差的影响。

由 (22) 式可看出, 等价权 w 是置于等价方差的分母, 前面讨论了 IGG III 方案对于 (7) 式的稳健估计是非常适合的, 但在 Kalman 滤波稳健估计中, 当残差 v_i 较大时, 有可能出现 $w = 0$ 的情况, 从而造成 (22) 式奇异, 故 IGG III 方案一般不适宜于 Kalman 滤波稳健估计。

Huber 法对于一般的稳健估计也是适合的^{[8][9]}, 但在 Kalman 滤波稳健估计中, 等价方差矩阵 \bar{R}_k 置于 (20) 式的增益矩阵 \bar{K}_k 的分母中。而丹麦法采用自然数的幂数形式, 当残差 v_i 达到可信的边界时, 丹麦法等权 w 比 Huber 法的变化要大, 当 \bar{R}_k 代入 (20) 式时, 采用丹麦法, 增益矩阵 \bar{K}_k 对残差 v_i 比较敏感, 对粗差有很好的抵制能力, 故它较为适合于 Kalman 滤波稳健估计。

卫星轨道是非线性系统, 我们采用了推广的 Kalman 滤波形式^{[3][7][11]}。另外, 由于事先并不知道观测残差 v_k 的大小, 在计算时, 可以先用一般的 Kalman 滤波解算出 \hat{X}_k , 然后利用 (15)(12)(22)(23) 式计算出 \bar{R}_k , 再进行 Kalman 滤波稳健估计, 必要时还可进行迭代计算。经过实际计算表明, 这样的计算步骤能达到迭代计算的精度, 并且满足实时性的要求。

3 计算与分析

若要克服观测粗差的影响, 则要求有准确的动力学模型。基于 Lageos 卫星的轨道比较稳定, 我们采用 Lageos 卫星的激光测距数据进行试验。在考虑 Lageos 卫星的动力学方程时, 考虑了除大气摄动以外的其它摄动影响^{[7][11]}: 地球形状摄动 (考虑到 30×30 阶), 地球形变摄动 (固体潮摄动、海潮摄动、地球自转形变摄动), N 体摄动 (日、月引力摄动和太阳系其它行星的引力摄动), 类阻力摄动; 光压摄动 (太阳辐射压摄动, 地球反照辐射压摄动), 广义相对论效应。尽管如此, 还是不可能完全精密地描述卫星力学模型, 我们在积分过程中加入了动态噪声协方差 Q 矩阵, 组成 Riccati 方程^[7], 积分得到状态协方差矩阵的预报值 $\Sigma_{\hat{X}_k}$ 。

取观测起始历元时刻 (UTC) 为 1995 年 6 月 10 日 0 时 0 分 0 秒, 观测弧长为 3 天, 采用了全球 14 个观测站对 Lageos 卫星的激光测距数据, 大部分观测站的测量中误差为 0.1 m, 个别站测量中误差为 0.3 m 或 0.5 m, 观测数据经过了严格的预处理, 剔除了粗差。为了说明问题, 我们在起始历元时刻加入了约 5 m 的初始轨道误差。计算步骤如下:

(1) 采用一般的 Kalman 滤波和 Kalman 滤波稳健估计 (取丹麦法的 w 函数, 其中 $k = 2$) 分别对 Lageos 卫星的 3 天激光测距数据进行计算, 并与批处理 (应用最小二乘原理对所有的观测数据进行处理得到卫星轨道^{[11][7]}) 计算的 Lageos 卫星的轨道进行比较, 其轨道差异 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 随时间变化的曲线如图 1 和图 2 所示。

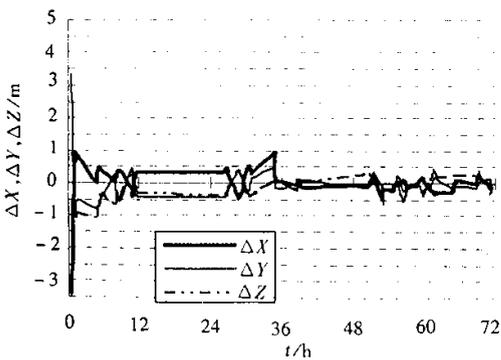


图 1 观测值无粗差的 Kalman 滤波与批处理的差异
Fig.1 Difference between Kalman filtering and batch with non-contaminated observations

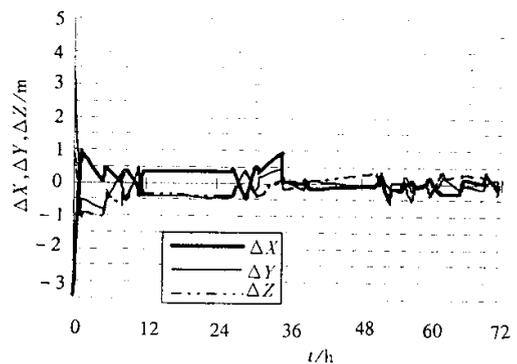


图 2 观测值无粗差的 Kalman 滤波抗差估计与批处理的差异
Fig.2 Difference between robust Kalman filtering and batch with non-contaminated observations

由图 1 和图 2 可知, Kalman 滤波稳健估计和一般的 Kalman 滤波一样, 即使在初始轨道有较大误

差的情况下，也很快稳定下来，说明它们在观测值没有粗差的情况下是等效的；

(2) 在观测数据中加入一些粗差，如在图 3 的 A、B、C、D、E、F、G 7 个时刻点分别加入了 0.55、-0.65、0.45、-0.5、+0.6、-0.8、-0.7 m 的粗差，并采用一般的 Kalman 滤波，它与批处理计算的轨道的差异 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 如图 3 所示。

从图 3 可看出，粗差对一般 Kalman 滤波的结果影响比较大，特别是在 D 时刻，-0.5 m 的粗差引起轨道的 X 轴分量误差竟达 4.7 m。

(3) 对步骤 (2) 中加入了粗差的观测数据进行轨道的 Kalman 滤波稳健估计，其中的权函数采用丹麦法和 Huber 法等两种方法，其定轨的结果与批处理计算的轨道的差异 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 如图 4 和图 5 所示。

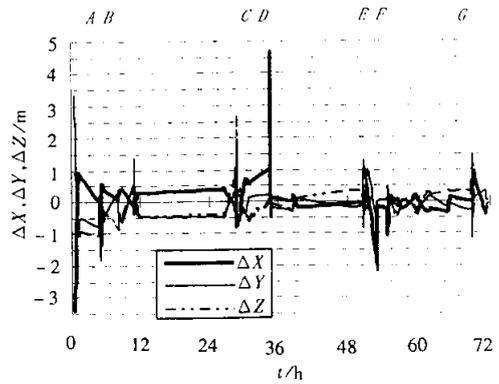


图 3 观测值有粗差的 Kalman 滤波与批处理的差异
Fig.3 Difference between Kalman filtering and batch with contaminated observations

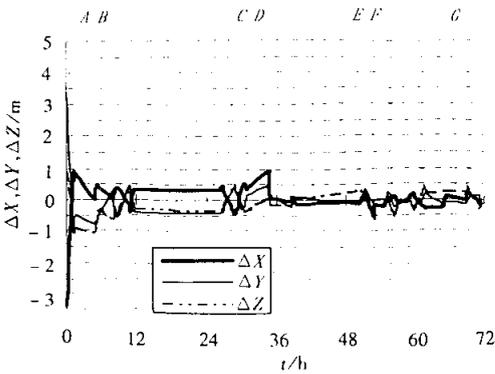


图 4 观测值有粗差的 Kalman 滤波抗差估计 (丹麦法) 与批处理的差异

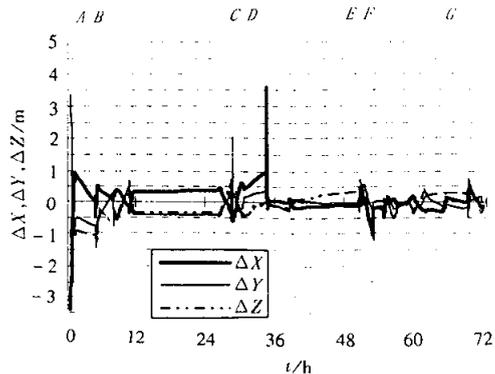


图 5 观测值有粗差的 Kalman 滤波抗差估计 (Huber 法) 与批处理的差异

Fig.4 Difference between robust Kalman filtering (Danmark Method) and batch with contaminated observations

Fig.5 Difference between robust Kalman filtering observations (Huber Method) and batch with contaminated observations

从图 4 和图 5 可知，Huber 法对粗差有一定的抵制能力，如前面所分析，但效果不如丹麦法好。从图 2 和图 4 可看出，采用丹麦法的 Kalman 滤波稳健估计，在观测值有粗差的情况下得到的结果与无粗差的情况差不多，与观测值无粗差的一般的 Kalman 滤波的结果也相符，说明它具有明显的抗粗差能力和稳健性。

4 结论

一般的 Kalman 滤波易受观测数据中粗差的影响。而 Kalman 滤波稳健估计对观测粗差有明显的抵制能力和稳健性，其中采用丹麦法的权函数比采用 Huber 法的权函数的效果好。

本文的结果是在考虑了较为准确的卫星动力学模型的情况下得到的，并加入了动态噪声协方差 Q 矩阵进行补偿。在卫星动力学模型不很精确的情况下，如何处理观测数据中的粗差还值得进一步研究。

参考文献：

[1] Jazwinski A H. Stochastic Processes and Filtering Theory [J]. Mathematics in Science and Engineering. 1970, 64.
 [2] Mehra R K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering [J]. IEEE Transactions on Automatic Control. 1970, 15 : 175-184.

-
- [3] 张金槐. 卡尔曼滤波发散的统计识别及自适应滤波技术. 国防科技大学学报 [J], 1980 , 1 : 1-14.
 - [4] Mohamed A H , Schwarz K P. Adaptive Kalman filtering for INS/GPS. Journal of Geodesy [J]. 1999 , 73 : 193-203.
 - [5] Wang Y J , and Kubik K K. Robust Kalman filter and its geodetic applications [J]. Manuscripta geodaetica. 1993 , 18 : 349-354.
 - [6] Yang Y X. Robust Bayesian Estimation [J]. Bulletin Geodesique. 1991 , 65 : 145-150.
 - [7] Tapley B D , Born G H , and Schutz BE. Orbit Determination Fundamental And Application [M]. Austin : Center of Space Research , The University of Texas , 1986.
 - [8] 杨元喜. 抗差估计理论及其应用 [M]. 北京 : 八一出版社 , 1993.
 - [9] 周江文 , 黄幼才 , 杨元喜 , 欧吉坤. 抗差最小二乘法 [M]. 武汉 : 华中理工大学出版社 , 1997.
 - [10] 王正明等. 弹道跟踪数据的校准与评估 [M]. 长沙 : 国防科技大学出版社 , 1999.
 - [11] 周建华. 卫星统计定轨与力学模型误差的补偿 [D]. 南京 : 南京大学 , 1992.

