

文章编号: 1001-2486 (2001) 02-0023-05

## 基于神经网络的广义两点边值问题\*

陈磊, 王海丽, 任萱

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 在航天领域中, 多数制导问题均可以抽象为广义两点边值问题。本文探讨了神经网络在广义两点边值问题求解中的应用。首先讨论了离线制导这一类静态两点边值问题的求解, 在此基础上, 对在线制导这一类动态两点边值问题进行了分析, 并给出了有效的解决方法。

**关键词:** 两点边值; 神经网络; 制导

**中图分类号:** V448.2      **文献标识码:** A

## Research on Generalized Two-Point Boundary-Value Problem Based on Neural Network

CHEN Lei, WANG Hai-li, REN Xuan

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A great number of guidance problems can be considered the problems of generalized two-point boundary-value in the field of aerospace. The paper discusses the methods to solve these problems with the help of neural network. The static two-point boundary-Value problems, such as offline guidance, are discussed in the paper. Based on the discussion, the dynamic two-point boundary-value problems, such as online guidance, are analyzed, and an effective method to solve them is presented.

**Key words:** two-point boundary-value; neural network; guidance

航天飞行器在执行各种机动飞行任务时, 它的制导<sup>[1,2,3]</sup>可分为两大类: 在线制导和离线制导。在线制导主要是指飞行过程中的控制方案选择, 如关于弹道导弹的主动段制导、卫星变轨机动、反导导弹的拦截等; 离线制导主要是指过程开始前, 即准备阶段的飞行方案选择, 如关于弹道导弹的初始诸元装订、卫星轨道交会、轨道转移的初值确定等。

对这些制导问题进行数学抽象, 可得如下问题:

已知  $n$  维初始状态向量  $X$ 、 $m$  维终端状态向量  $Y$  求解  $p$  维控制向量  $u$ , 使得

$$Y = f(X, u) + \varepsilon \quad (1)$$

其中函数  $f$  是动态过程的数学抽象,  $\varepsilon$  为随机干扰。

这个问题一般被称为广义两点边值问题。本文将着重讨论神经网络在此问题求解过程中的作用。

## 1 广义两点边值问题的分析

在工程应用中, 广义两点边值问题一般具有如下特性:

(1) 设初始状态的取值空间为  $\Omega_S$ , 控制向量的取值空间为  $\Omega_C$ , 终端状态的取值空间为  $\Omega_e$ ,  $\forall X_0 \in \Omega_S, U_0 \in \Omega_C, \exists Y_0 \in \Omega_e$ , 使得  $Y_0 = f(X_0, U_0)$

(2) 动态过程的函数表达  $f$  一般是非线性的, 在一定的近似条件下, 可以获得它的解析公式求解, 但精度较低。动态过程  $f$  的高精度求解需要利用数值积分等仿真方法来实现。

(3) 函数  $f$  对初始状态向量和控制向量的一阶以至高阶导数, 很难获得有效的解析表达式, 一般需要利用数值算法来求取。

由于广义两点边值问题具有上述特性, 它的求解主要是利用各类数值算法<sup>[5]</sup>来完成。这些数值算法包括拟牛顿法、共轭梯度法、变尺度法等, 在具体解算中主要存在两个问题:

(1) 控制向量初值的选取。如果初值没有选好, 将使求解迭代时间增长, 甚至可能造成算法无法收

\* 收稿日期: 2000-06-28

作者简介: 陈磊 (1974-), 男, 博士。

敛。

(2) 动态过程  $f$  的求解。 $f$  的仿真计算需要较长的时间, 不利于问题的快速求解。

## 2 神经网络求解的具体应用

人工神经网络是由人工建立的以有向图为拓扑结构的动态系统。它通过对连续或断续的输入作状态响应而进行信息处理。依据神经网络的构成方式以及其在计算机上的实现, 它具有以下几个特性<sup>[6]</sup>:

- (1) 神经网络可以处理那些难于用模型或规则描述的过程或系统;
- (2) 神经网络是本质的并行系统;
- (3) 神经网络是本质的非线性系统;
- (4) 神经网络具有很强的信息综合能力。

在广义两点边值问题的求解过程中, 主要利用神经网络的过程辨识能力。目前, 依据构成方法的不同, 神经网络可以分为多种具体类型, 本文将利用 BP 网络进行具体的讨论。BP 网络是一种多层前馈神经网络, 通常有一个或多个隐层; 隐层中的神经元均采用 Sigmoid 型变换函数, 输出层的神经元采用纯线性变换函数。由于权值的调整采用反向传播 (Back Propagation) 的学习算法, 因而常称其为 BP 网络。

从理论上讲, 具有 Sigmoid 型隐含神经元特性的三层 BP 网络, 能够逼近任意函数, 即它可以实现从输入到输出的任意的非线性映射<sup>[6][7]</sup>。因此在确定了 BP 网络的结构以后, 利用输入输出样本集对网络进行训练, 也即对网络的权值和阈值进行学习和调整, 可以使 BP 网络实现给定的输入输出映射关系。经过训练的网络, 对于不是样本集中的输入也能给出合适的输出, 这种性质称为泛化 (generalization) 功能。从函数拟合的角度看, 这说明 BP 网络具有较好的插值功能。

在具体应用中, 主要利用 BP 网络进行以下两类辨识:

### (1) 辨识 $f(X, U)$

利用多组已知的  $\{(X, U), Y\}$  来训练神经网络, 对  $f(X, U)$  进行辨识, 以便给定任一初始状态向量  $X_1 \in \Omega_s$  和控制向量  $U_1 \in \Omega_c$ , 通过神经网络可以快速获得终端状态向量  $Y_1$ 。在此基础上, 利用拟牛顿法等寻优算法进行数值求解, 可以有效地降低计算时间。

### (2) 辨识 $f^{-1}(X, Y)$

利用多组已知的  $\{(X, Y), U\}$  来训练神经网络, 对  $f^{-1}(X, Y)$  进行辨识, 以便给定任一初始状态向量  $X_2 \in \Omega_s$  和终端状态向量  $Y_2 \in \Omega_e$ , 通过神经网络可以快速获得控制向量  $U$ 。在使用中需要注意的是,  $f^{-1}(X, Y)$  必须是一定原则下的一一映射, 即对于给定的初始状态向量  $X_2$  和终端状态向量  $Y_2$ , 如果存在一个控制向量集合  $M \subset \Omega_c, \forall U \in M, Y_2 = f(X_2, U)$ , 则必须利用最优性等原则, 从集合  $M$  中选出唯一的控制向量  $U_2$ , 使得  $Y_2 = f(X_2, U_2), U_2 = f^{-1}(X_2, Y_2)$ 。

## 2.1 应用实例

在弹道导弹的发射准备中, 用来调整导弹控制系统和瞄准系统的参数 (称为诸元), 其主要作用是在已知发射点  $L$  和目标点  $O$  的地理参数的情况下, 保证弹头的实际落点  $C$  与目标点重合<sup>[8]</sup>。在初步分析中, 耗尽关机型导弹的基本诸元主要是发射方位角  $A_0$  和音速段最大攻角  $\alpha_m$ 。因此, 发射点  $L$  的地理参数为初始状态向量, 目标点  $O$  的地理参数为终端状态向量, 基本诸元为控制向量, 这是一个典型的两点边值问题。

在诸元求取中, 动态过程是指弹道导弹的弹道计算。弹道计算需要考虑许多因素, 如导弹控制系统、推进系统等分系统的特性、大气特性、地球非球形摄动等等, 因此耗时较多, 不利于诸元的快速求解。

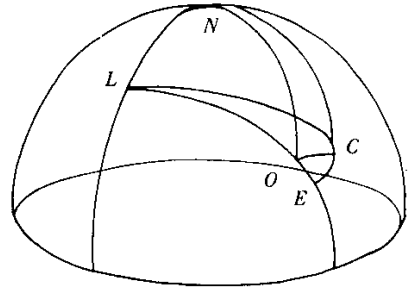
正是由于 BP 网络的泛化功能, 使得我们可以利用 BP 网络实现弹道导弹基本诸元的快速求取。选取 BP 网络结构如图 2 所示, 输入为落点的纬度、经度, 输出为  $\alpha_m$  和发射方位角  $A_0$ 。图 2 中  $S_1$  是隐层神经元的个数,  $S_1$  与网络要完成的映射关系的复杂程度有关, 需要在实际的尝试中确定, 隐层采用

Tan-Sigmoid 变换函数。

对某二级固体弹道导弹计算了 600 组弹道，计算的初始条件为：发射点纬度  $30^\circ$ ，发射点经度  $115^\circ$ ， $\alpha_m$  取自  $(8^\circ, 11^\circ)$  的均匀分布， $A_0$  取自  $(30^\circ, 50^\circ)$  的均匀分布。以这 600 组数据作为样本，使用 Levenberg-Marquardt 优化算法对图 2 的 BP 网络进行了训练，经过几次尝试选定了隐层神经元个数  $S_1 = 50$ 。

记样本为  $\{(A_0^1, \alpha_m^1)\}(\varphi^1, \lambda^1)\}$ ，其中  $\{(\varphi^1, \lambda^1)\}$  为实际落点的纬度、经度。在进行 BP 网络的训练时以  $\{(\varphi^1, \lambda^1)\}$  为输入，以  $\{(A_0^1, \alpha_m^1)\}$  为输出。为检验所获得的 BP 网络的效果，进行了以下检验：

(1) 利用原样本  $\{(A_0^1, \alpha_m^1)\}(\varphi^1, \lambda^1)\}$  的检验：以  $\{(\varphi^1, \lambda^1)\}$  为 BP 网络的输入，得到 BP 网络的输出  $\{(A_0^{1*}, \alpha_m^{1*})\}$ ，再以  $\{(A_0^{1*}, \alpha_m^{1*})\}$  为初值进行弹道导弹的弹道计算，得到实际落点的



L:发射点 O:目标点 C:真实落点  
CE:横程偏差 OE:纵程偏差

图 1 导弹落点位置示意图

Fig.1 Sketch of missile's falling point

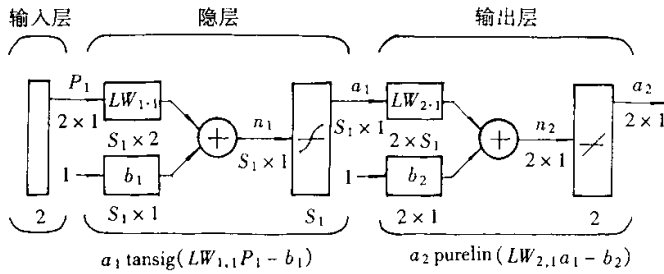


图 2 BP 网络结构

Fig.2 Structure of BP network

纬度、经度  $\{(\varphi^{1*}, \lambda^{1*})\}$ ，以落点偏差即  $\{(\varphi^{1*}, \lambda^{1*})\}$  与  $\{(\varphi^1, \lambda^1)\}$  之间的距离来衡量 BP 网络的效果。图 3 显示了落点偏差。数据分布的统计如表 1 所示。

(2) 利用新样本的检验：另外选取 100 组  $\alpha_m$  和  $A_0$ ，记为  $\{(A_0^2, \alpha_m^2)\}$  进行弹道导弹的弹道计算，得到实际落点的纬度、经度  $\{(\varphi^2, \lambda^2)\}$ ，利用新的样本进行与 A 相同的检验计算。即以  $\{(\varphi^2, \lambda^2)\}$  为 BP 网络的输入，得到 BP 网络的输出  $\{(A_0^{2*}, \alpha_m^{2*})\}$ ，再以  $\{(A_0^{2*}, \alpha_m^{2*})\}$  为初值进行弹道导弹的弹道计算，得到实际落点的纬度、经度  $\{(\varphi^{2*}, \lambda^{2*})\}$ ，以落点偏差即  $\{(\varphi^{2*}, \lambda^{2*})\}$  与  $\{(\varphi^2, \lambda^2)\}$  之间的距离来衡量 BP 网络的效果。图 4 显示了落点偏差。数据分布的统计如表 1 所示。

通常在基本诸元计算时要求落点偏差在 50 m 以内，图 3、图 4 和表 1 表明：应用所获得的 BP 网络求取的基本诸元进行弹道计算，落点偏差在 40 m 以内，均能满足精度要求。

在诸元计算中，BP 网络对  $f(X, U)$  的辨识也具有较高的精度，具体算例此处省略。

通过上述计算可知，神经网络对非线性过程具有较好的辨识能力。因此，它在广义两点边值问题的求解中起到了较好的作用。

### 2.2 神经网络的组合应用

在上述算例中，利用神经网络可以直接求出满足精度要求的控制向量。在实际工程中，神经网络的应用存在以下两个特点：

- (1) 神经网络的泛化能力主要是在取值区间内，对于区间外的点的估值误差将增大；
  - (2) 在取值区间内，训练参数的密集度越高，训练好的神经网络所获得的结果的综合误差越低。
- 在实际应用中，为了获得更高的精度，可以将神经网络与拟牛顿法等寻优算法组合起来使用，即

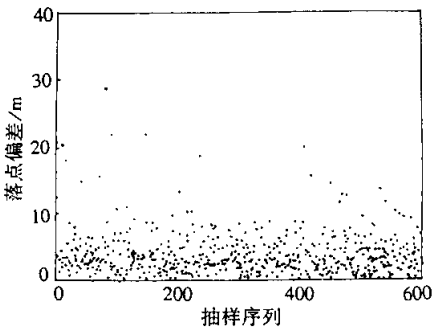


图3 训练数据序列误差情况

Fig.3 The errors of training data

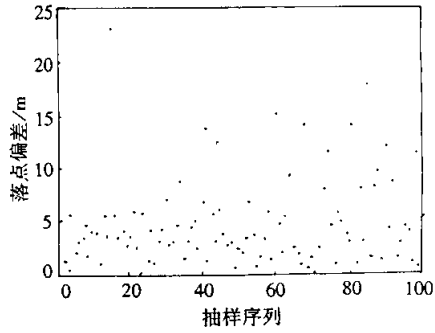


图4 随机数据序列误差情况

Fig.4 The errors of random data

表1 落点偏差统计表

Tab.1 The statistics of falling error

数据区间	图3		图4	
	数据 (%)	数据 (个数)	数据 (%)	数据 (个数)
30m ~ 40m	0.17	1	0	0
20m ~ 30m	0.83	5	1	1
10m ~ 20m	3.5	21	8	8
0m ~ 10m	95.5	573	91	91

首先利用事先算好的数据训练神经网络,对于具体问题,则利用训练好的神经网络求取控制向量的初值点,并将此初值点代入拟牛顿法等寻优算法中,以求出所需的控制向量。此时,寻优算法中动态过程 $f$ 的计算一般采用仿真方法进行。这种组合算法认为,广义两点边值问题的最优解在神经网络所获得的参数的附近,这个假设条件对于导弹诸元计算、助推段制导等问题均是成立的。因此,组合应用可以有效地减少迭代次数,缩短计算时间,具有很高的应用价值。

### 3 在线制导的神经网络求解

以上广义两点边值问题的研究均是针对离线制导问题,在线制导的每一次计算的形式与上述讨论类似。但由于在线制导是一个连续动态计算的过程,因此此时广义两点边值问题可以进行如下数学抽象:

设航天飞行器的运动轨道方程为

$$\frac{dX}{dt} = g(t, X, u) \quad (2)$$

运动轨道约束由附加的代数方程组

$$f(X) = 0 \quad (3)$$

给出,其中 $X$ 和 $f$ 的维数为 $l$ , $u$ 和 $g$ 的维数为 $m$ 。 $X$ 为状态变量, $u$ 为控制向量。在航天飞行器的运动过程中,求解恰当的控制向量 $u$ ,使轨道 $X(t)$ 满足运动轨道约束(3)式。

在此类动态两点边值问题求解的过程中,神经网络的作用主要是对轨道约束 $f(X)$ 进行辨识,即对于给定的一个状态 $X$ 利用训练好的神经网络获得约束 $f(X)$ 的具体数值。在此基础上,控制向量 $u$ 可以通过实时微分控制算法<sup>[9][10]</sup>来获得。

在弹道导弹的主动段制导中,将神经网络与微分控制有效地结合在一起,就可以获得一种较为实

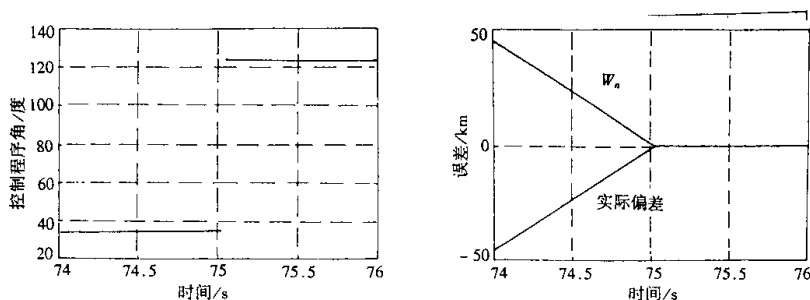


图5 显式制导计算结果

Fig.5 Simulation result of explicit guidance

用的显式制导方法。图5为耗尽关机型弹道导弹显式制导的计算结果，其中控制程序角是利用神经网络与微分控制的结合实时计算出来的，由导弹的“时间—误差”图可以看出，此种制导方法取得了良好的制导效果。这也说明，神经网络的应用有利于此类动态两点边值问题的解决。

#### 4 结束语

广义两点边值问题求解的难点主要在于  $f$  的获取，神经网络的非线性拟合是获取  $f$  的一种有效手段。对于不同的  $f$  神经网络拟合的有效性尚缺乏有效的证明，目前主要通过数值仿真进行验证。在此基础上，神经网络的应用是解决两点边值问题的有效途径。

#### 参考文献：

- [1] 任萱. 人造卫星轨道力学 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1988.
- [2] 程国采. 弹道导弹制导方法与最优控制 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1987.
- [3] 任萱，陈磊. 轨道机动中的两点边值问题 [A]. 国防科工委第一届飞行力学学术交流会，西安，1996.
- [4] 陈磊，任萱. 战术弹道导弹中段多弹头进攻方法的研究 [J]. 航天控制，2000. 3.
- [5] 袁兆鼎主编. 防空导弹设计中的数值方法 [M]. 宇航出版社，1991.
- [6] 胡守仁，沈清，胡德文，时春. 神经网络应用技术 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1993.
- [7] Howard Demuth, Mark Beale. Neural Network Toolbox [DB], MATLAB 文档.
- [8] 王海丽，陈磊. 弹道导弹基本诸元的快速装订算法研究 [J]. 国防科技大学学报，1999. 11 (3).
- [9] 费景高. 微分代数控制问题的实时计算 [J]. 自动化学报，1993, 19 (4).
- [10] Brenan. K. E.. Numerical solution of trajectory prescribed path control problems by backward differentiation formulas [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1986 : AC-31, 266 - 269.

