文章编号：1001-2486（2001）02-0043-04

建立颗粒流方程的推广 BGK 模型方法※

陈伟芳，李　洁，王全利，任　兵，范宝春

（国防科技大学航天与材料工程学院，湖南 长沙　410073）

摘　要：从描述颗粒流动的推广 BGK 模型方程出发建立颗粒流方程。其中推广 BGK 模型方程的处理采用了经典分子动力论中的 Chapman-Enskog 方法。由于建立颗粒流方程的思路简单清晰，且方程中各量都有明确的物理意义，因此易于推广。

关键词：颗粒流方程；BGK 模型；分子动力论；Chapman-Enskog 方法

中图分类号：O561.5；O355　　**文献标识码**：A

Set up the Granule Flow Equations by the Method of the Generalized BGK Model

CHEN Wei-fang，LI Jie，WANG Quan-li，REN Bin，FAN Bao-chun，

（College of Aerospace and Material Engineering，National Univ of Defense Technology，Changsha，410073，China）

Abstract：The granule flow equations are deduced from the generalized BGK model. The generalized BGK equation is treated with the Chapman-Enskog method that is used in the classic molecular kinetics. The equations are easily generalized since the method is simple and the quantities in them have concise physical meaning.

Key words：equations for granule flow；BGK model；molecular kinetics；Chapman-Enskog method

颗粒流动在各种工程问题及自然界中广泛存在。由于近年来工程问题的需要以及计算机技术的迅速发展，人们已对颗粒流动问题进行了深入细致的研究，取得了一系列重要成果[1]、[2]。文献提供两种建立颗粒流方程的方法。其一是通过连续介质模型应用微元体的质量、动量和能量的平衡关系来建立颗粒流方程[3]、[4]；其二是通过分子动力论方法，应用 Boltzmann 方程的积分矩建立颗粒流方程[2]、[5]。前者包含较少的假设，推导过程简单明了，且不为颗粒流的介质类型或具体的流型所限制，但这类方程中描述相互间作用、微元体面作用（如应力和热流等）和表面张力作用的各种表达式形式复杂，物理意义也不直观。后者则能揭示颗粒流动现象的微观含义，能加深对颗粒流方程中各项物理意义的认识，对于一些特定的颗粒模型，它能通过 Boltzmann 方程的 Chapman-Enskog 解给出计算各种输运系数的表达式，但其推导过程繁琐，且易受介质类型或具体的流型所限制，不易推广。现有文献中有关颗粒流方程的类型很多，相互间差异很大，存在一定的混乱，并且不乏谬误之处[6]。因此研究一种既简明、实用，又不失严谨的建立颗粒流方程的方法，不仅具有重要的学术意义，而且具有重要的应用价值。

BGK 模型是 Boltzmann 方程碰撞项的近似，应用 Chapman-Enskog 展开方法可较易地得到 BGK 模型方程式的零阶解（Euler 方程）和一阶解（类 Navier-Stokes 方程）。[7]、[8] 本文在克服经典 BGK 模型缺陷的基础上，提出推广的 BGK 模型，并在此基础上建立颗粒流方程，从而使颗粒流基本方程的研究在理论体系的完备性及实用性方面又有所进步，有利于建立统一的颗粒流基本方程。

1　描述颗粒流的 Boltzmann 方程及守恒方程

在颗粒流中，可以把颗粒视为质量和体积很大的分子，而应用分子动力论的方法处理。颗粒流的

※ 收稿日期：2000-09-21
基金项目：国家自然科学基金项目（19902021 和 19772018）
作者简介：陈伟芳（1970-），男，博士。

中心问题就是确定颗粒分布函数

$$f_p(\boldsymbol{c},\theta,\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

它是这样定义的：f_p（$\boldsymbol{c}$，θ，$\boldsymbol{x}$，t）$\mathrm{d}\boldsymbol{c}$ 是在速度空间围绕 $\boldsymbol{c}$ 的邻域 $\mathrm{d}\boldsymbol{c}=\mathrm{d}c_1\mathrm{d}c_2\mathrm{d}c_3$ 且颗粒内部温度为 θ 的颗粒数密度。

假定颗粒流中颗粒大小与气相（或液相）的分子平均自由程相比足够大，且颗粒都是大小相同的钢体球，那么描述颗粒流动的 Boltzmann 方程为[9]

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}c_i f_p+\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{F_i}{m}f_p+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{Q}{mc_v}f_p=\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_{\mathrm{col}} \tag{2}$$

式中 c_v 为颗粒比热，F_j 为作用在颗粒上的外力（重力、气体或液体对颗粒的阻力及浮力等），θ 为颗粒与气体或液体间的热输运速度，颗粒之间碰撞导致的颗粒分布函数 f_p（$\boldsymbol{c}$，θ，$\boldsymbol{x}$，t）的变化包括在碰撞项（$\partial f_p/\partial t$）$_{\mathrm{col}}$中。

对于颗粒流的守恒方程，可在 Boltzmann 方程中分别乘以 m、mc_i、$mc^2/2$、θ 后对速度 $\boldsymbol{c}$ 及颗粒内温 θ 的整个空间积分得到

$$\frac{\partial\rho_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_p V_{pi}=0 \tag{3a}$$

$$\rho_p\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_{pj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)V_{pi}=-\frac{\partial p_p}{\partial x_i}+\frac{\partial\tau_{pij}}{\partial x_j}+\iint F_i f_p\,\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta \tag{3b}$$

$$\begin{aligned}\rho_p\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_{pj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}T_p\right)=&-p_p\frac{\partial V_{pi}}{\partial x_i}+\tau_{pij}\frac{\partial V_{pi}}{\partial x_j}-\frac{\partial Q_{pi}}{\partial x_i}+\iint c_iF_if_p\,\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\\&-\frac{1}{n_p}\iint c_if_p\,\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\iint F_if_p\,\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{3c}$$

$$\rho_p\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_{pj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{k}{m}T_S\right)=-\frac{\partial Q_{si}}{\partial x_i}+\iint\frac{kQ}{mc_v}f_p\,\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta \tag{3d}$$

式中 ρ_p 为颗粒密度，p_p 为颗粒压强，τ_{pij}为颗粒流的粘性应力，Q_{pi}为颗粒热运动动能导致的热流矢量，Q_{si}为颗粒内部温度差异导致的热流矢量。

2 推广的 BGK 模型方程

一种简化 Boltzmann 方程的方法就是采用一个能简化数学运算过程、而又保留真实碰撞积分许多定性特性的近似碰撞算子 M（f_p）代替方程（2）中的碰撞积分项（$\partial f_p/\partial t$）$_{\mathrm{col}}$，这其中最富盛名的就有 BGK 碰撞算子。对于颗粒流，BGK 碰撞算子的表达式为

$$M(f_p)=\nu_p(f_{pM}-f_p) \tag{4}$$

式中 f_{pM}为颗粒的 Maxwell 局域平衡态分布，ν_p 为与运动速度 $\boldsymbol{c}$ 及温度 θ 无关的颗粒碰撞频率。于是，描述颗粒流动的 BGK 模型方程为

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}c_i f_p+\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{F_i}{m}f_p+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{Q}{mc_v}f_p=\nu_p(f_{pM}-f_p) \tag{5}$$

由气体分子动力论知，尽管 BGK 模型方程比较简单，但根据它的推导得到的 Chapman-Enskog 解的一级近似分布函数与根据 Boltzmann 方程得到的一级近似分布函数相似，且由 BGK 模型方程能够得到正确的粘性应力张量 τ_{ij}和热流矢量 Q_i 的表达式。BGK 模型方程的缺陷就是由它计算得到的 Prandtl 数为 1，这与由 Boltzmann 方程计算得到和实验测量到的 Prandtl 数等于 2/3 不相符合。为克服此缺陷，1968 年 Shakov 改进了 BGK 碰撞算子[10]，并由推广的 BGK 模型方程得到了正确的 Prandtl 数。Shakov 碰撞算子的表达式为

$$M(f)=v\left\{f_M\left[1+(1-P_r)\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{q}\left(\frac{C^2/RT-5}{5pRT}\right)\right]-f\right\} \tag{6}$$

式中 f_M 为气体的 Maxwell 局域平衡态分布；R 为气体常数；$R=k/m$；$\boldsymbol{q}$ 为气体热流矢量；p、T 分

别为气体压强和温度；v 为与运动速度 c 无关的气体分子碰撞频率。

类似地，BGK 模型方程（5）亦不能正确描述颗粒流动的 Prandtl 数。受 Shakov 工作的启发，根据气体分子动力论中 BGK 模型方程的 Chapman-Enskog 解[8]，本文拟采用以下推广的 BGK 模型方程描述颗粒流动，使得由模型方程能够正确得到颗粒流动的输运特性：

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}c_if_p+\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{F_i}{m}f_p+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{Q}{mc_v}f_p=v_p\left[f_{pM}(1+\xi\phi_0)-f_p\right] \tag{7}$$

$$\xi\phi_0=\frac{1}{v_p}(1-\phi_p)C_j\left(\frac{mC^2}{2kT_p}-\frac{5}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\ln T_p)+\frac{1}{v_p}(1-\eta_p)\varepsilon C_j\frac{\theta-T_s}{|\theta-T_S|}\frac{\partial T_S}{\partial x_j} \tag{8}$$

$$\xi=\frac{V_{pr}}{Lv_{pr}}\ll 1 \tag{9}$$

式中 ξ 为颗粒流的 Knudsen 数，L 为特征长度，V_{pr} 为特征速度，v_{pr} 为特征碰撞频率，ϕ_p、η_p 为与颗粒运动速度 c 及颗粒温度 θ 无关的待定参数。

3 Chapman-Enskog 解及颗粒流方程的构成关系式

令

$$f_p=f_{pM}\left[1+\xi\phi_1+O(\xi^2)\right] \tag{10}$$

于是将 f_p 的表达式（10）代入推广的 BGK 模型方程（7），并由 Chapman-Enskog 展开方法得

$$\begin{aligned}\Phi_1&=v_p\xi(\phi_0-\phi_1)\\&=\frac{1}{f_{pM}}\left[\frac{\partial f_{pM}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}c_if_{pM}+\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{F_i}{m}f_{pM}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{Q}{mc_v}f_{pM}\right]\end{aligned} \tag{11}$$

应用联式微分法则，并利用形式上与 $f_p=f_{pM}$ 相一致的守恒方程来消除时间导数，就可得到 Φ_1 的表达式为

$$\begin{aligned}\Phi_1=&C_i\left(\frac{mC^2}{2kT_p}-\frac{5}{2}\right)\frac{\partial\ln T_p}{\partial x_i}+\frac{m}{kT_p}\left(C_iC_j-\frac{C^2}{3}\delta_{ij}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\varepsilon\frac{(\theta-T_S)}{|\theta-T_S|}C_i\frac{\partial T_S}{\partial x_i}\\&+\frac{C_i}{p_p}\iint F_if_{pM}\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{Q}{mc_v}\right)+\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{F_i}{m}\right)-\frac{F_iC_I}{kT_p}+\frac{Q}{mc_v}\frac{(T_s-\theta)}{|\theta-T_s|}\varepsilon\\&+\left(\frac{mC^2}{3kT_pp_p}-\frac{1}{p_p}\right)\left(\iint c_iF_if_{pM}\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{n_p}\iint c_if_{pM}\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\iint F_if_{pM}\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{\varepsilon}{n}\frac{(\theta-T_s)}{|\theta-T_s|}\iint\frac{Q}{mc_v}f_{pM}\mathrm{d}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{12}$$

假设计算外力 F_i 及热输运速度 Q 的表达式分别为

$$\frac{F_i}{m}=g_i+\alpha(V_i-c_i)-\frac{\in_s}{m}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{13}$$

$$\frac{Q}{mc_v}=K(T-\theta) \tag{14}$$

式中 g 为重力加速度，p、T、V 分别为气相或液相压强、温度及速度，$\in_s$ 为颗粒体积，α、K 为常数。（13）式给出的外力表达式包括了重力、气体或液体对颗粒的阻力及浮力的作用。将（13）及（14）式代入（12）式，经积分运算后得

$$\begin{aligned}\Phi_1=&C_i\left(\frac{mC^2}{2kT_p}-\frac{5}{2}\right)\frac{\partial\ln T_p}{\partial x_i}+\frac{m}{kT_p}\left(C_iC_j-\frac{C^2}{3}\delta_{ij}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\varepsilon\frac{(\theta-T_s)}{|\theta-T_s|}C_i\frac{\partial T_s}{\partial x_i}\\&+\varepsilon K|\theta-T_s|+2\alpha-K\end{aligned} \tag{15}$$

于是由（11）式可得到计算 $\xi\phi_1$ 的表达式为

$$\xi\phi_1=-\frac{\Phi_1}{v_p}+\xi\phi_0 \tag{16}$$

将 $\xi\phi_1$ 的表达式（16）代入式（10），即得到推广的 BGK 模型方程（10）的一阶近似解。而 p_p、τ_{pij}、

Q_{pi}及Q_{si}的计算式分别为

$$p_p = n_p k T_p \tag{17}$$

$$\tau_{pij} = \frac{p_p}{v_p}\left[\frac{\partial V_{pi}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{pj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial V_{pk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] \tag{18}$$

$$Q_{pi} = -\frac{5}{2}\frac{k}{m}\frac{p_p\phi_p}{v_p}\frac{\partial T_p}{\partial x_i} \tag{19}$$

$$Q_{si} = -\frac{k}{m}\frac{p_p\eta_p}{v_p}\frac{\partial T_s}{\partial x_i} \tag{20}$$

将（13）~（14）式及（17）~（20）式代入（3a）~（3e）式，即可得到描述颗粒流动的基本方程。

4 结论

（1）根据经典分子动力论中的 Chapman-Enskog 方法，得到了描述颗粒流动的推广 BGK 模型方程（7）的一阶解（16）。

（2）由推广的 BGK 模型方程得到了颗粒流动的粘性应力张量 τ_{pij}和热流矢量Q_{pi}、Q_{si}的表达式（18）~（20），其表达形式与连续介质理论所采用的形式一致。

（3）由表达式（18）~（20）可知，可以通过选取恰当的待定参数 v_p、ϕ_p 和 η_p，使得推广的 BGK 模型方程能够正确描述颗粒流动的输运特性。

参考文献：

[1] Soo S L. Multiphase Fluid Dynamics [M]. Science Press, Beijing, China, 1990.
[2] Gidaspow D. Multiphase Flow and Fluidization (Continuum and Kinetic Theory Descriptions) [M]. Academic Press, New York, 1994.
[3] Drew D A & Segel L A. Averaged Equations for Two – Phase Flow [J], Studies in Apllied Math., 1971, 50: 205 – 231.
[4] Ishii M. Thermo – Fluid Dynamic Theory of Two – Phase Flow [M] . Eyrolles, Paris 1975.
[5] 刘大有. 建立两相流方程的动力论方法 [J]，力学学报，1987，19（3）.
[6] 刘大有、王柏懿，推导悬浮体二相流基本方程的一种新方法，力学学报，1992，24（1）.
[7] 应纯同. 气体输运理论及应用 [M]. 北京：清华大学出版社，1990.
[8] 维塞特 W G，小克鲁格 C H. 物理气体动力学引论 [M]，北京：科学出版社，1978.
[9] 王平等译. 流体力学大全 [M]. 北京航空航天大学出版社，1991.
[10] Shakov E M. Fluid Dynamics 3 [J], 1968, 95.