

文章编号: 1001-2486 (2000) 02-0047-05

激波对密度间断层干扰及界面效应的数值模拟*

李洁, 任兵, 张艳, 陈伟芳

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 运动激波在密度间断层传播时, 引起密度分界面的变形, 相应激波形状发生改变。以高密度层为例, 采用 TVD 格式模拟这一过程, 并与半解析解比较分析, 初步讨论了激波对高密度层干扰作用引起高密度层的上扬和高密度层内激波与壁面的反射现象。

关键词: 激波; 密度间断层; 数值模拟

中图分类号: O354.5 **文献标识码:** A

Numerical Study on the Interaction of a Planar Shock Wave Sweeping a Density Layer with the Interface

LI Jie, REN Bing, ZHANG Yan, CHEN Wei-fan

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: When a planar shock wave is sweeping a density layer, the deformation of the density interface and the wave configurations can occur. Numerical simulations about this process for high density layer is proposed. The result based on TVD scheme is checked using analytical simulations. It shows that the interaction of the shock wave with the high density layer can induce the wave reflection from the wall which is either a stationary regular reflection or a stationary Mach reflection.

Key words: shock wave; density layer; numerical simulations

激波在密度间断层传播引起界面和激波的变形现象, 在自然界和工程中经常遇到。由于近年来工程问题的需要以及计算机技术的迅速发展, 人们对激波与密度间断层的相互作用问题进行探讨, 并取得了一系列重要成果, 其中对激波与低密度层的相互作用已作较全面研究^[1]。本文则对激波在高密度层内的传播进行数值模拟, 应用半解析方法验证, 初步分析了激波对高密度层的干扰作用, 并给出了激波与界面作用的演化过程。结果具有一定的理论指导意义, 为进一步研究气固界面提供参考。

1 控制方程

将坐标固定在入射激波上, 如图 1 所示。(4) 区和 (1) 区的气体压强、速度相同, (0) 区为高密度层, 密度分界面位于 $y = h$ 处。波形及界面在 (5) 区发生变形。根据不同的来流条件, (5) 区内的波系结构有所不同, 如图 2 所示。在直角坐标系下, 二维无粘非定常流的方程可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} = 0$$

$$\mathbf{A} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T \quad \mathbf{B} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho e + p)u)^T \quad \mathbf{C} = (\rho v, \rho vw, \rho v^2 + p, (\rho e + p)v)^T$$

$$\text{无量纲参数: } \bar{P} = \frac{P}{P_4}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_4}, \bar{x} = \frac{x}{l} \quad (l = 1 \text{ cm})$$

2 数值方法

差分格式采用时间、空间均为二阶精度的 NND-4b 格式^[2], 利用时间分裂法, 通量项用 Van-Leer 分裂方式。格式如下:

* 收稿日期: 2000-09-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19772018)
作者简介: 李洁 (1974-), 女, 博士生。

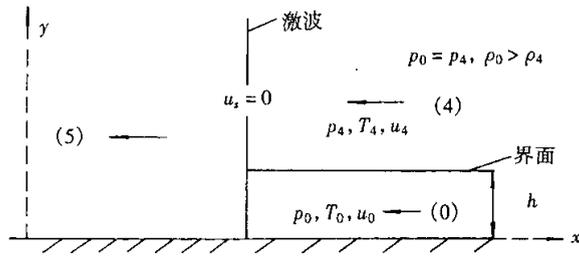


图 1 物理模型示意图

Fig.1 Schematic illustration of the problem in shock-fixed coordinates

$$A_{i,j}^{n+1} = L_x(\frac{\Delta t}{2})L_y(\Delta t)L_x(\frac{\Delta t}{2})A_{i,j}^n$$

x 方向分裂：

$$\begin{aligned} \overline{A_{i,j}^{n+1}} &= A_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(B_{i+1/2,j}^n - B_{i-1/2,j}^n) \\ A_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} [A_{i,j}^n + \overline{A_{i,j}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{i+1/2,j}^{n+1} - H_{i-1/2,j}^{n+1})] \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} H_{i+1/2,j} &= B_{i+1/2,j,L}^+ + B_{i+1/2,j,R}^- \\ B_{i+1/2,j,L}^+ &= B_{i,j}^+ + \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta B_{i+1/2,j}^+, \Delta B_{i-1/2,j}^+) \\ B_{i+1/2,j,R}^- &= B_{i+1,j}^- - \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta B_{i+3/2,j}^-, \Delta B_{i+1/2,j}^-) \end{aligned}$$

计算区域为 (20, 0), (20, 10), (0, 10), (0, 0) 四点构成的矩形域。网格采用拉伸网格 (200 × 200)，壁面附近自动加密。边界条件中，物面上为无渗透条件 (V = 0)；入口处为来流；上边界根据正激波关系式给出；其余由内点线性外推。

3 半解析方法

与图 1 相对应，(4) 区内入射激波向内弯曲，进入高密度层 (0) 区，形成透射波，在壁面处产生两种不同的反射：规则反射和马赫反射。如图 2 (a) 所示，透射波径直到达壁面，形成规则反射；而在图 2 (b) 中，透射波未径直到达壁面，是以马赫杆的形式与壁面作用。

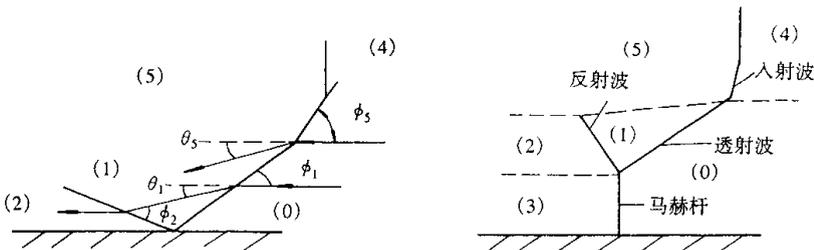


图 2 (a) 规则反射, (b) 马赫反射

Fig.2 (a) Regular reflection (b) Mach reflection

3.1 规则反射

见图 2 (a)，由斜激波关系式可知

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{(M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1) \operatorname{ctg} \phi_1}{\frac{\gamma+1}{2} M_0^2 - (M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1)} \quad (1)$$

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \frac{(M_4^2 \sin^2 \phi_5 - 1) \operatorname{ctg} \phi_5}{\frac{\gamma+1}{2} M_4^2 - (M_4^2 \sin^2 \phi_5 - 1)} \quad (2)$$

$$\frac{P_1}{P_5} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1) \quad (3)$$

$$\frac{P_5}{P_4} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_4^2 \sin^2 \phi_5 - 1) \quad (4)$$

因 $P_0 = P_4$, $P_1 = P_5$, 故

$$M_0 \sin \phi_1 = M_4 \sin \phi_5 = A \quad (5)$$

又因 $\theta_1 = \theta_5$, $M_4 = V_s/a_4 = M_s$, 其中 M_s 为入射激波马赫数, M_s , ρ_0/ρ_4 皆为初始条件, 均已知。令 $x = \sin^2 \phi_1$, 可得

$$\frac{1 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_5}{1 - \sin^2 \phi_5 \sin^2 \phi_1} = \frac{1 - \sin^2 \phi_1}{1 - \frac{\rho_0}{\rho_4} \sin^2 \phi_1} \frac{\rho_0}{\rho_4} \quad (6)$$

及

$$x^2 + Bx + C = 0 \quad (7)$$

其中

$$B = -\frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{\rho_0}{\rho_4} \right) + (\gamma-1) \frac{1}{M_4^2} \frac{\rho_4}{\rho_0} \right]$$

$$C = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^2 \frac{\rho_4}{\rho_0} - \frac{1}{M_4^2} \left(\frac{\rho_4}{\rho_0} \right)^2 \right]$$

故根据初始值, 可计算出 ϕ_1 , ϕ_5 。

3.2 马赫反射

根据 Homung. (1979) 的 length scale concept^[31], 当 $\theta_1 - \theta_2 = \theta_3 = 0$ 时 (θ_2 为气流经过反射激波时的偏转角, θ_3 为来流经过马赫杆的偏转角), 即图 2(b) 中 (2) 区和 (3) 区的气流平行于壁面时, 马赫反射转化为规则反射。通过迭代方法可计算出马赫反射临界值, 具体求解步骤如下:

- (1) 给定 M_s , 预估 ρ_0/ρ_4 ;
- (2) 由式 (1)(7), 分别求出 θ_1 , M_0 , ϕ_1 ;
- (3) 根据下式, 求出 M_1

$$M_1 = \frac{1}{\sin(\phi_1 - \theta_1)} \sqrt{\frac{M_0^2 \sin^2 \phi_1 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1}}$$

- (4) 由式 (3), 求出 p_1 。
- (5) $\theta_2 = \theta_1$, 由下式, 求出 ϕ_2

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1}{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2 - (M_0^2 \sin^2 \phi_1 - 1)} \operatorname{ctg} \phi_2$$

- (6) 根据下式, 求出 p_2 , p_3 :

$$p_2 = p_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \phi_2 - 1) \right];$$

$$p_3 = p_0 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_0^2 - 1) \right]$$

(7) 比较 p_2 和 p_3 ，若差值太大，重新预估 ρ_0/ρ_4 ，再次迭代直至 $p_2 \approx p_3$ 。

4 计算结果与分析

初始密度间断面位于 $y = 3.5$ 处，入射激波位于 $x = 18.5$ 处，因长度量纲参数为 1 cm，故图中的位置坐标单位均为 cm。当量纲参数 $P = 10^5$ Pa， $T = 288$ K 时，图中无量纲时间 time 与实际时间 t 的关系为： $t = 34 \times 10^{-6} \times \text{time}$ (s)。

图 3 为 $M_s = 2$ ， $\rho_0/\rho_4 = 5$ 时的等密度线图，由图可见，马赫杆高度随时间推移逐渐减小至消失，

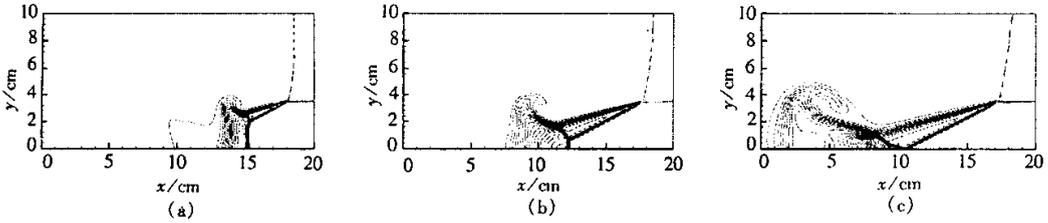


图 3 马赫数为 2，初始间断密度比为 5 的等密度线图
Fig.3 Density contours for $M_s = 2.0$ and $\text{den}_0/\text{den}_4 = 5.0$

马赫反射发展成规则反射。当反射激波撞击界面时，朝壁面反射压缩波，如图 3 (c) 所示。比较图 3 (a) - 3 (c)，虽然高密度层内的激波入射角均为 29° ，但波后流动不尽相同，高密度层内气体上扬且逐渐向下游发展。

图 4 为马赫数 $M_s = 2$ ，不同密度比的等密度线图，由图可见，当 $\rho_0/\rho_4 = 1.5$ (如图 4 (a)) 时，并未产生任何波的反射，只是入射激波向后弯曲，以连续的曲率变化沿高密度层直到垂直于壁面；当

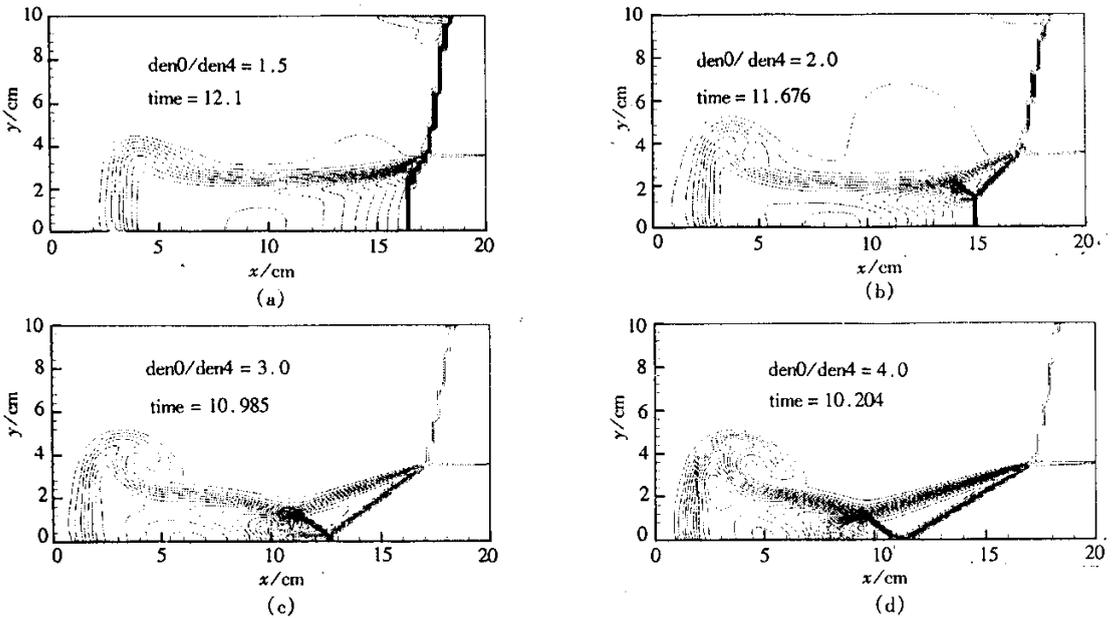


图 4 马赫数为 2，不同初始间断密度比的等密度线图

Fig.4 Density contours at four different initial density ratios across the interface for $M_s = 2.0$

密度比增加时， $\rho_0/\rho_4 = 2.0$ (图 4 (b)) 形成马赫反射，高密度层流场被透射激波、反射激波、马赫杆和接触间断面分成四个区。当密度比进一步增加时，马赫反射的马赫杆高度逐渐减小 (图 4 (c) - 4 (d))，直至马赫杆消失，成为规则反射，并且随密度比增大，规则反射角减小 (图 4 (d) - 图 3 (c))。同时，由马赫反射发展成规则反射后，密度比愈大，到达壁面的压缩波愈多。图 4 (b) 为马

赫反射，压缩波未能穿透接触间断面；图 4 (c) 为马赫反射，压缩波到达壁面；图 4 (d) 为规则反射，到达壁面的压缩波显而易见。

图 5 为物面压强分布图。由图可见，规则反射点 $x = 9.8$ 的压强值比马赫反射点 $x = 15.05$ 和无反射时的压强值高，并且，在规则反射点后，位于 $x = 8.62$ 处，存在较强的压缩波。

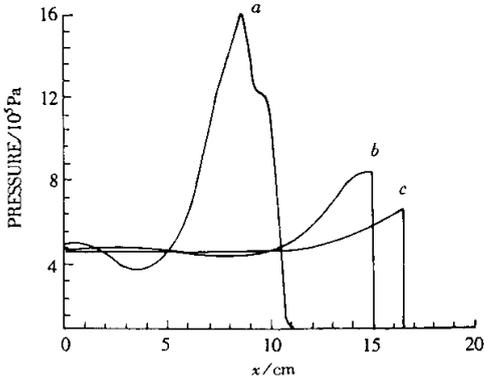


图 5 物面压强分布图

(a) $\rho_0/\rho_4 = 5.0$; (b) $\rho_0/\rho_4 = 2.0$; (c) $\rho_0/\rho_4 = 1.5$

Fig.5 The surface pressure distributions for

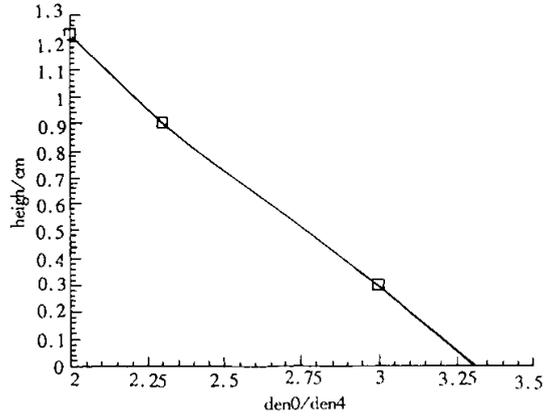


图 6 马赫数为 2，翅赫杆高度变化图

Fig.6 The height of the Mach stem for $M_s = 2.0$

图 6 反映了马赫杆高度随 ρ_0/ρ_4 的变化，如图所示， $h = 0$ ， $\rho_0/\rho_4 = 3.31$ ，此值为通过数值计算求得的马赫反射临界值。将其值代入半解析公式，可得 $p_2 = 15.3p_0$ ， $p_3 = 15.46p_0$ ，两者近似相等。从中可知，数值计算与半解析方法求解是一致的，即当 $M_s = 2.0$ 时， $\rho_0/\rho_4 < 3.31$ ，反射不会发展成规则反射， $\rho_0/\rho_4 \geq 3.31$ ，反射由马赫反射逐渐发展成规则反射。

5 小结

本文以高密度层为例，采用 NND 格式数值模拟，与半解析解比较，初步分析了激波对不同密度比间断层的干扰作用。当界面上下密度比增大，马赫反射的马赫杆高度减小至消失，成为规则反射，高密度层内的激波入射角也随之减小。随时间推移，高密度层气流上扬，上扬区向下游发展，规则反射由马赫反射发展而成。

参考文献：

- [1] Rayevsky D, Ben - Dor G. Shock Wave Interaction with a Thermal Layer [J] . AIAA , 1991 , 30 (4) : 1135 - 1139 .
- [2] 叶友达 . 航天飞机简化外形无粘流场的数值模拟 [D] . 绵阳 : 中国空气动力学研究与发展中心研究生部 . 1991 .
- [3] Homung , H G , Oertel H . Transition to Mach Reflection of Shock Waves in Steady and Pseudo - Steady Flow with and without Relaxation [J] . Fluid Mech , 1979 , 90 : 541 - 560 .

