

文章编号: 1001-2486 (2001) 02-0052-05

预处理方法求解低马赫数流场的边界条件*

廖守亿, 王承尧

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 通过求解预处理后的二维可压缩 Euler 方程, 数值试验了常见的三种进口边界条件的提法及其对稳定性和收敛性的影响。数值试验结果表明, 预处理后, 在低马赫数时基于黎曼不变量的边界条件为反射边界条件, 而另两种边界条件为无反射边界条件。

关键词: 预处理; 边界条件; Euler 方程

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

Boundary Conditions for Solving Flowfields at Low Mach Numbers by Preconditioning

LIAO Shou-yi; WANG Cheng-yao

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The influences of three common boundary conditions at low speed entrance on stability and convergence are present by solving 2-D compressible Euler equations that have been preconditioned. The test shows that by preconditioning the boundary condition based on the Riemann invariants at low Mach numbers is reflective boundary condition while the other two are unreflective boundary conditions.

Key words: preconditioning; boundary conditions; Euler equations

近十几年来, 预处理方法已被成功地用来求解低速流场, 使得低速流场的计算能够快速收敛到定常解。预处理方法就是在控制方程 (Euler 或 Navier-Stokes 方程) 的时间导数项前乘了一个矩阵, 因而它有效地改变了控制方程的时间相关特性, 从而解决了将可压缩方程应用到低速不可压缩时出现的特征值“刚性”问题, 加快了计算的收敛性。由于预处理方法改变了原来的控制方程, 数值离散方法也要作相应的改变。例如无粘项的迎风格式一定要从预处理方程出发而不是基于未预处理的方程。同样地, 预处理后边界条件的提法也要作相应的改变, 而预处理方法对边界条件的影响是存在的^{[1][2]}。

本文的工作是 Giles^[3]对一维未预处理方程和 Darmofal^[4]对一维预处理方程边界条件分析工作的发展, 目的在于分析试验预处理方法对几种常用的边界条件的影响。通过对预处理后的边界条件研究, 为预处理在复杂的工程应用打下基础。

1 控制方程的预处理及其求解

二维预处理 Euler 方程为:

$$\Gamma \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\tilde{Q} = \frac{1}{J} Q, \tilde{E} = \frac{1}{J} (\xi_x E + \xi_y F), \tilde{F} = \frac{1}{J} (\eta_x E + \eta_y F)$$

$$Q = (p, \rho u, \rho v, T)^T, E = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e + p)u)^T, F = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e + p)v)^T$$

而预处理矩阵 Γ ^[5]为

* 收稿日期: 2000-10-18

基金项目: 中国科学院“九五”重点项目专题研究 (KZ952-S1-405-2)

作者简介: 廖守亿 (1974-), 男, 博士生。

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1/T & 0 & 0 & -\rho/T \\ u/T & \rho & 0 & -\rho u/T \\ v/T & 0 & \rho & -\rho v/T \\ c_v + q/T & \rho u & \rho v & -\rho q/T \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $q = (u^2 + v^2)/2$, $c_v = R/(\gamma - 1)$, $R = 1/\gamma M_\infty^2$ 。方程无粘部分 ξ 方向的特征值为

$$\lambda_{1,2} = U, \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(1 + 1/R) \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(1 - 1/R)U]^2 + 4\gamma TS^2}$$

由于 $M_\infty \rightarrow 0$ 时, $1/R = o(M_\infty^2) \rightarrow 0$, 故四个特征值均为流动速度 U 的量级; 同理, 可以求得 η 方向上的四个特征值, 可以得到类似的结果。因而通过预处理后, 较好地解决了特征值的“刚性”问题, 可以加快计算的收敛。特征值表达式中的参数的具体含义参见文献 [7]。

注意到方程 (1) 中的 Q 为包含压强 P 的原始变量而不是守恒变量。虽然方程 (1) 与我们熟知的 Euler 方程在时间方向上并不相容, 但对于定常问题来说, 由于最后时间导数项趋于 0, 因而方程 (1) 与标准的 Euler 方程在定常流动的情况下是相容的。

应用数值对方程 (1) 求解时, 采用 LU-SGS 隐式迭代方法, 同时显式部分采用 JST 中心差分格式, 具体的公式及表达式见文献 [6] [7]。

2 算例及边界条件处理

2.1 算例

本文数值实验的目的在于研究预处理方法对边界条件提法的影响, 因而算例的外形及流场相对简单, 选取直管道下壁面带凸包 (Bump) 的无粘流动为计算实例。管道的无量纲长度为 3, 高度为 1, 凸包位于下壁面的中央, 长度为 1, 其尺寸为 $y = 0.10 \sin^2 \pi x, 0 < x < 1$ 。图 1 为计算网格图。

2.2 边界条件处理

由于整个流场为低速流动, 入口和出口都是亚音速的, 因而在出口处应给定反压 $p_{\text{exit}} = p_\infty$, 其余变量采用一阶外推即可。在壁面上给定滑移条件, 同时 p 和 T 的法向梯度为 0。由于进口速度为亚音速, 此时边界条件有不同的提法, 本文研究三种常见的边界条件。

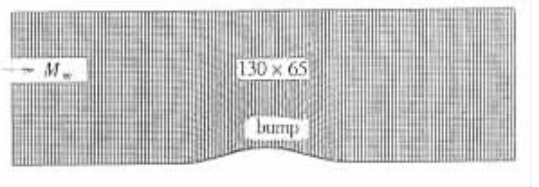


图 1 计算网格

Fig.1 Computational grid

2.2.1 黎曼边界条件 (RMBC)

在未加预处理时, 黎曼边界条件为无反射边界条件, 也就是说, 所有的扰动都可以在有限的时间内传播到流场以外。但对方程进行预处理后, 黎曼边界条件是否还具有这样的性质呢? 目前还没有更多的理论分析结果。虽然 Darmofal^[4] 的理论分析和数值实验表明, 此时黎曼边界条件为反射边界条件, 但其理论分析的结论是基于特殊的预处理矩阵而言的, 且数值实验时采用了不同于理论分析的预处理矩阵, 因此这样的结论是否具有普遍性还不得而知。

约定下标 ∞ 、 E 、 b 分别表示无穷远流、与入口边界相邻的内点和入口边界处的值, 则黎曼不变量的具体形式为:

$$R_\infty = u_{n_\infty} - 2c_\infty \mathcal{A}(\gamma - 1), R_i = u_{ne} + 2c_e \mathcal{A}(\gamma - 1) \quad (3)$$

由上式可得入口边界处的法向分速和声速

$$u_{nb} = (R_\infty + R_i)/2, c_b = (\gamma - 1)^{1/2} (R_i - R_\infty)/4 \quad (4)$$

令熵 $S = p/\rho^\gamma$, 则有

$$\begin{cases} u_{\tau b} = u_{\tau_\infty}, S_b = S_\infty & \text{如果 } u_{nb} > 0 \\ u_{\tau b} = u_{\tau_e}, S_b = S_e & \text{如果 } u_{nb} < 0 \end{cases}$$

于是, 通过声速公式和上式可求出 T 、 ρ 和 p 。

2.2.2 给定焓和焓及流动角 (HSBC)

未预处理时, 这种边界条件为反射边界条件。具体为

$$v = 0, \quad p_b = p_e,$$

然后, 由下式可求出马赫数

$$\frac{p_0}{p_b} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_b^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (5)$$

最后再求出其它的量。

2.2.3 给定速度 u 和温度 T 和流动角 (QTBC)

给定入口的流动角为 0。具体为 $u_b = 1, v_b = 0, T_b = 1, p_b = p_e$ 。

3 计算结果及分析

本文计算了不同的低来流马赫数时的收敛情况, 这些来流马赫数为 0.4、0.2、0.1、0.01、0.001 和 0.0001 及 0.00001 七种情况, 为了验证预处理方法加快收敛的特性, 同时用没有预处理的方法对这些算例进行了比较计算。计算时取 ξ 方向的动量方程的残余作为收敛的标志。图 2 是边界条件为 HSBC 时不同的来流马赫数时的收敛曲线。图中 PC 指“预处理”, NPC 指“未预处理”。从中可以明显地看出, 当马赫数低于 0.2 时, 未预处理计算的收敛性很差; 而预处理后, 收敛了 7 个量级, 可见预处理后计算有着良好的收敛性。而马赫数小于 0.01 时, 不预处理根本不收敛。马赫数小于 0.1 时, 预处理方法计算的收敛性几乎完全相同, 即使最后马赫数小到 0.0001。马赫数为 0.4 时, 预处理的效果并不明显。

图 3 是边界条件为 QTBC 时低速流动的收敛图, 此时马赫数可小到 10^{-5} 。同样可看出, 在马赫数低于 0.2 时, 收敛性几乎完全一致, 0.4 时收敛慢一些。因此可得到与 HSBC 边条同样的结论。由此可见, 本文的预处理在马赫数低于 0.2 (此时流动为不可压) 时有明显加快收敛的能力。

图 4 是三种边界条件的计算收敛史比较图, 计算马赫数为 0.4, 0.2 和 0.001。QTBC 边条的残余呈振荡下降的趋势, HSBC 的残余曲线比较光滑, 但似乎下降 8 个量级后就停止了, 而 QTBC 还可以继续下降, 这在马赫数低于 0.2 时更为明显。RMBC 虽然要比其他两种边界条件下降得快一点, 但只能下降 4~5 个量级, 且随着马赫数的减小, 收敛性逐渐变差, 以至在马赫数为 0.001 时计算不稳定。

为了更细致地比较、说明各种来流马赫数和边界条件对收敛性的影响, 本文在表 1 中进行了比较, 表中大部分数据来自于上面三个图。从表中可以看出, RMBC 边界条件在马赫数低于 0.1 时计算不稳定, 而当马赫数大于 0.2 时, RMBC 边界条件可以收敛, 但收敛精度不高, 这也说明, 预处理后 RMBC 边界条件在低速时是反射边界条件, 这与文献 [4] 的结论是一致的。而 QTBC 边界条件在马赫数小于 0.2 时, 具有很好的收敛性, 特别是马赫数低于 0.1 时, 收敛性几乎完全一致, 即使马赫数小到 10^{-5} ; 但当马赫数高于 0.2 时, 迭代步数增加。HSBC 在低速时也是稳定的, 但要比 QTBC 边界条件需要的迭代步数多, 马赫数为 10^{-5} 时, HSBC 不稳定。这可能是由于该边条在计算进口温度 (或马赫数) 时, 表达式中用到了压强 p , 而此时 p 为 10^{10} 的量级, 因而计算时可能引入了较大的截断误差。

综上所述, 低马赫数时, 预处理后低马赫数流场的进口边界条件应采用 QTBC 边界条件或 HSBC

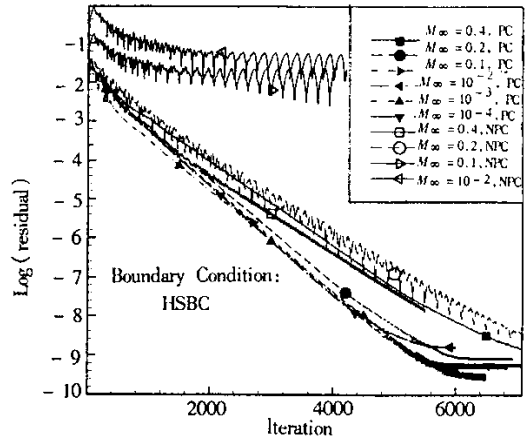


图 2 不同的来流马赫数、预处理与未预处理计算收敛史比较, 边条: HSBC

Fig. 2 Convergence rates of preconditioning and nonpreconditioning at different Mach Numbers. Boundary condition: HSBC

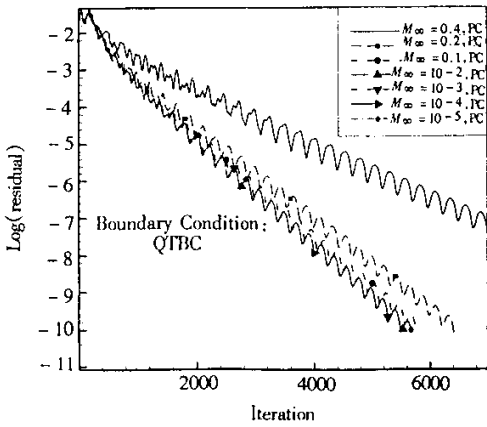


图3 预处理时不同的来流马赫数计算的收敛史比较，边条：OTBC

Fig.3 Convergence rates of preconditioning at different Mach numbers. Boundary condition : QTBC

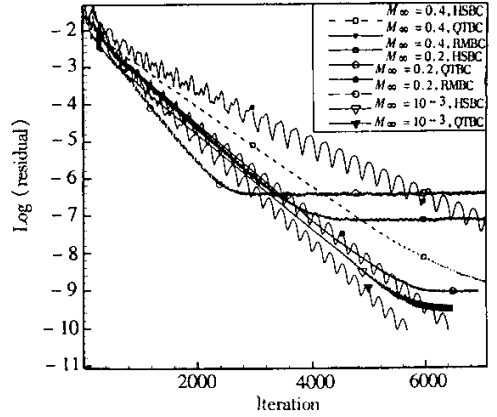


图4 不同的来流马赫数，不同边界条件时预处理计算收敛史比较

Fig.4 Convergence rates of preconditioning at different Mach Numbers and different boundary conditions

边界条件。这样的结论与文献 [4] 的结论有出入。文献 [4] 认为，预处理后 HSBC 为完全无反射边界条件，而 QTBC 时进口为反射边界条件，故应采用 HSBC 边界条件。为什么有这样的差别呢？这可能是由于文献 [4] 的结论是由某一特殊的预处理矩阵在一维情况下得出的，其结论并不一定具有普遍性。虽然文中简单地认为此结论具有普遍性，但是缺乏必要的理论证明和实践检验。而 RMBC 在马赫数低于 0.2 是不稳定的，这一点与其是相符的。

表1 预处理后，不同马赫数、不同边界条件的收敛性、稳定性比较

Tab.1 Comparison of convergence and stability for different boundary conditions and mach numbers with preconditioning

步数 马赫数	边界条件			收敛精度 (量级)	备注
	HSBC	QTBC	RMBC		
10^{-5}	不稳定	5000	不稳定	7	QTBC 还可继续收敛
0.0001	5300	5000	不稳定	7	
0.001	5300	5000	不稳定	7	
0.01	5800	5000	不稳定	7	
0.1	5400	5000	不稳定	7	
0.2	5900	5500	2700	7, 7, 4	
0.4	7600	8000	4000	7, 6, 5	

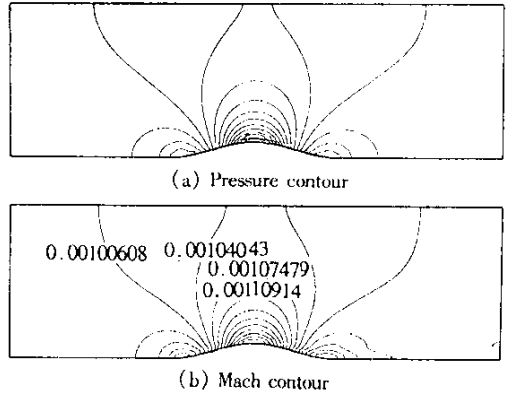


图5 压力和等马赫数图

Fig.5 Pressure and Mach number contours

图5是来流马赫数为0.001时流场的等压图和等马赫数图。可见，此时的低马赫数流场是一个对称的流场，压力图几乎是完全对称的，马赫数图的对称性稍差些，但结果也相当好。

4 结论

本文求解了低速时绕凸包的无粘流动，分析比较了常见的三种进口边界条件对解的收敛性和稳定性的影响。结果表明，在入口马赫数低于0.2求解预处理方程时，进口边界条件提黎曼边界条件是不合适的，是反射边界条件；在基于本文的预处理矩阵的前提下，用 QTBC 和 HSBC 两种边界条件计算

是稳定的 (进口马赫数大于 10^{-5}), 且用 QTBC 边界条件时计算可以收敛到很高的精度。只要所采用的边界条件能使计算稳定, 预处理方法能使低马赫数流场的计算快速收敛, 而不预处理时收敛很慢或根本不收敛。

参考文献:

- [1] A Godfrey. Step toward a Robust Preconditioning [J] . AIAA - 94 - 0520 , 1995 .
- [2] Turkel E , Radespiel , Kroll N. Assessment of two Preconditioning Methods for Aerodynamics Problems [J] . Computer&Fluids , 1997 , 26 (6): 613-634 .
- [3] Giles. M. Eigenmode analysis of Unsteady One - Dimensional Euler Equations [J] . ICASE Report , 1983 , 83 : 47 .
- [4] Darmofal D L. Eigenmode Analysis of Boundary Conditions for the One - Dimensional Preconditioned Euler Equations [J] . N19990009063 .
- [5] Dailey L D , Pletcher R H. Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time - Accurate Navier - Stokes Algorithms [J] . AIAA - 95 - 1668 - CP .
- [6] 廖守亿 , 王正华 , 王承尧 . 预处理方法在低速粘性流动中的应用 [J] . 国防科技大学学报 , vol22 , No.1 , 2000 , 122 (1) .
- [7] 廖守亿 . 预处理方法研究与应用及大气扩散的数值模拟 [D] . [硕士学位论文] , 国防科技大学 , 2000 .

