

文章编号 :1001-2486(2001)02-0057-04

两种粘弹塑性材料中 III 型界面裂纹的断裂特性分析*

肖万伸¹⁻³, 唐国金³, 唐松花²

(1. 湖南大学工程力学系, 湖南 长沙 410082 2. 中南大学铁道校区数理力学系, 湖南 长沙 410075 ;
3. 国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要 将 Dugdale-Barenblatt 模型推广应用于两种粘弹塑性材料之间裂纹问题的分析, 对沿切向具有跳跃边界条件的边值问题的控制方程进行富里叶变换, 然后用逐段定积分变换方法, 将该边值问题转化为奇异积分方程组。解方程后计算了裂纹尖端塑性区尺寸及裂纹尖端张开位移 COD, 给出了应变能释放率算式。结果表明, 裂纹尖端塑性区尺寸和 COD 均决定于两种材料的最小屈服极限 τ_s , COD 随着时间的增长而先快后慢的增长。

关键词 界面裂纹; 粘弹塑性; 裂纹尖端张开位移; COD

中图分类号 O346 **文献标识码** A

Fracture Features of Interfacial Crack of III Type in Bi-material of Visco-elasto-plasticity

XIAO Wan-shen¹⁻³, TANG Guo-jin³, TANG Song-hua²

1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha, 410082; 2. Department of Mathematics, Physics and Mechanics, Railway Institute of Central South University, Changsha, 410075; 3. College of Astronautics and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, 410073)

Abstract Dugdale-Barenblatt model is extended to analyse the problem of the crack on the interface between two viscoelastoplastic materials. After the governing equations are Fourier-transformed, the problem of boundary conditions with tangential jumps transformed into singular integral equations by using sectional definite-integral transformation. Following solving the integral equations are the formulation of the length of the plastic zone (LPZ) ahead of the crack tip and crack-tip opening displacement (COD), and the derivation of the strain energy release rate. Results reveal that the LPZ and COD are both determined by the minimum yielding stress of the two constituent materials, and the latter also rises at a gradually declining speed as time increases.

Key words interfacial crack; visco-elasto-plasticity; COD

随着现代新材料、新结构的广泛应用, 材料的粘性性质受到重视。有迹象表明, 大量工程结构的严重断裂、倒塌事故并不是发生在加载瞬时, 而是在经历了一段时间后突然发生的, 其延迟性和突发性的特点, 有如疲劳破坏一样, 使人们很难预防。因此, 研究时间效应对断裂的影响成为航空航天、船舶等工业中所十分关注的问题。这促进了粘性断裂理论快速发展。

对于单一材料的粘弹塑性断裂已有一些讨论^[1-5], 但尚未见过有关粘塑性界面裂纹的研究。实践表明, 界面裂纹是使不同材料连接结构失效的主要原因。基于这一工程背景, 本文研究双材料粘弹塑性界面断裂的 III 型问题。粘弹塑性界面断裂问题十分复杂, 为了将问题的难度降低到可求解的程度, 我们采用 Dugdale-Barenblatt (D-B) 模型, 将裂纹尖端前沿的断裂过程区简化成条带形状。文章 [1-5] 的讨论说明, 这种运用 D-B 模型进行简化的方法对粘弹塑性断裂是十分有效的。此外, 本文假定惯性项可以忽略不计, 亦即讨论“准静态问题”^[1]。

1 边值问题

如图 1 所示, 在两种材质不同的各向同性粘弹塑性材料的界面上, 有一长 $2a$ 的裂纹。两种材料分别占据了上、下半无限空间。在离界面无限远处、并与界面平行的平面上作用着方向与纸面垂直的剪切

* 收稿日期 2000-09-05
作者简介: 肖万伸(1959-)男, 博士后。

载荷, 其应力大小为 τ_0 。

建立双坐标系 Oxy_1z_1 及 Oxy_2z_2 如图 1 所示。

由裂纹体的几何形状及加载条件可知, 三个位移分量中只有一个沿 z 向的位移分量不为零, 即这里讨论的为 III 型断裂问题。

平衡微分方程为

$$\frac{\partial \tau_{zx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(i)}}{\partial y_i} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y_i > 0, i = 1, 2) \quad (1)$$

本构关系是

$$\tau_{zx}^{(i)} = \mu_i \frac{\partial w_i}{\partial x}, \tau_{zy}^{(i)} = \mu_i \frac{\partial w_i}{\partial y_i}; \quad (i = 1, 2) \quad (2a - 2b)$$

边值条件为

$$y_i \rightarrow +\infty, -\infty < x < \infty: \tau_{zy}^{(i)}(x, y_i) = \tau_0, y_i \rightarrow 0, -a < x < a: \tau_{zx}^{(i)}(x, y_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3a - 3d)$$

其中

$$\mu_i = \frac{1}{1 + \nu^{(i)}} \left\{ E_0^{(i)} + \sum_{j=1}^n E_j^{(i)} \exp[-\alpha_j^{(i)} t] \right\} \quad (I = 1, 2; \alpha_j^{(i)} > 0) \quad (4)$$

为粘弹性剪切模量, t 为时间变量。

方程 (1)~(4) 构成了完整的边值问题。采用 D-B 模型, 仿照文献 [6], 可将本文问题化为无裂纹体在无穷远处受剪应力载荷的问题 1 与有裂纹体在无穷远处不受载荷、在裂纹面上受剪应力载荷的问题 2 的叠加。由于前一问题对断裂参数无影响, 故本文对其不予分析, 而只分析后一问题。

利用 D-B 模型考虑粘塑性, 将方程 (3) 用下述边值条件

$$y_i \rightarrow \infty, -\infty < x < \infty: \tau_{zy}^{(i)}(x, y_i) \rightarrow 0, w_i(x, y_i) \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5a - 5c)$$

$$y_i = 0, |x| < a: \tau_{zy}^{(i)}(x, y_i) = -\tau_0, y_i = 0, a < |x| < b: \tau_{zx}^{(i)}(x, y_i) = \tau_s - \tau_0 \quad (i = 1, 2) \quad (6a - 6c)$$

代替, 则可得到决定边值问题 3 的各方程, 亦即描述问题 2 的方程为 (1) 式~(2) 及式 (4)~(6)。

2 积分方程及其解

利用 Fourier-Cosine 变换

$$\tilde{w}_i(\xi, y_i) = \int_0^\infty w_i(x, y_i) \cos(\xi x) dx, w_i(x, y_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{w}_i(\xi, y_i) \cos(\xi x) d\xi; \quad (i = 1, 2)$$

将式 (1)~(2) 变换后考虑到 (5), 有

$$w_i(\xi, y_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A^{(i)}(\xi) \exp(-\xi y_i) \cos(\xi x) d\xi; \quad (y_i > 0) \quad (7)$$

这里的未知函数 $A^{(i)}(\xi)$ 由边值条件 (6) 决定。

设

$$A^{(1)}(\xi) + A^{(2)}(\xi) = \frac{1}{\xi} \left[\int_0^a f(s^2) \sin(s\xi) ds + \int_a^b g(t^2) \sin(t\xi) dt \right] \quad (8)$$

其中 $f(s^2), g(t^2)$ 为待定函数。

将式 (2) (7) (8) 代入 (6), 可得

$$\int_0^a \frac{f(s^2)}{s^2 - x^2} d(s^2) + \int_a^b \frac{g(t^2)}{t^2 - x^2} d(t^2) = \pi \tau_0 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (0 < |x| < a)$$

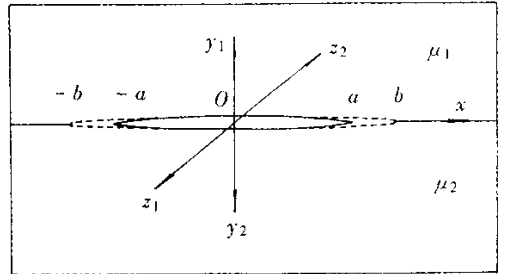


图 1 几何形状及坐标系

Fig. 1 Geometry and coordinates

$$\int_0^a \frac{f(s^2)}{s^2 - x^2} \alpha(s^2) + \int_a^b \frac{g(t^2)}{t^2 - x^2} \alpha(t^2) = -\pi(\tau_s - \tau_0) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (a < |x| < b)$$

上述奇异积分方程组可用普莱梅公式及 Hilbert 逆变换来求解。解此积分方程组得

$$f(s^2) = \tau_0 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}} - \frac{2\tau_s}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right) + \frac{\tau_s}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \ln \left[\frac{\frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{s} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}}{\frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{s} - \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}} \right], \quad (0 < s < a) \quad (9a)$$

$$g(t^2) = \frac{\tau_0}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \frac{t}{\sqrt{b^2 - t^2}} - \frac{\tau_s}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left\{ \frac{2t}{\sqrt{b^2 - t^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right) + \ln \left[\frac{\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - t^2}}{t}}{\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - t^2}}{t}} \right] \right\}, \quad (a < t < b) \quad (9b)$$

3 塑性区尺寸及裂纹尖端张开位移

裂纹尖端塑性区尺寸为 $b - a$, 可通过令虚拟拓展后假想裂纹尖端的裂纹尖端强度因子为零而得。为此, 令

$$\lim_{x \rightarrow b+0} \sqrt{x - b} \left[\int_0^a \frac{f(s^2)}{s^2 - x^2} \alpha(s^2) + \int_a^b \frac{g(t^2)}{t^2 - x^2} \alpha(t^2) \right] = 0 \quad (10)$$

得塑性区尺寸

$$b - a = a \left[\sec \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right) - 1 \right] \quad (11)$$

据裂纹尖端张开位移 COD 的定义, 由(7)~(9)式, 得 COD 的公式

$$\delta = \frac{4\tau_s a}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right) \right] \quad (12)$$

4 应变能释放率

应变能释放率定义为裂纹尖端扩展单位面积所释放的能量^[7], 即

$$G_{III} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^2 \int_0^a \tau_{zy_i}^{(1)}(x, y_i = 0) w(x, y_i = 0) dx$$

据前述结果, 不难算出

$$G_{III} = \tau_s \sigma = \frac{4\tau_s^2 a}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right) \right]$$

在一般情况下, 外载 τ_0 比材料的屈服极限 τ_s 要小得多, 于是有 $\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} < 1$, 从而

$$\ln \left[\sec \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right)^4 + \frac{1}{45} \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right)^6 + \dots,$$

当 $\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \leq 0.7$ 时, 若取上述级数前两项, 即

$$G_{III} \approx \frac{\tau_s^2 a}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi \tau_0}{2\tau_s} \right)^2 \right]$$

则误差低于 2.0%。

5 结果与讨论

由(11)式可见,塑性区尺寸与材料的弹性性质参数无关,而决定于外载与两种材料最小屈服极限的比值 τ_0/τ_s ,并且此比值越大,则塑性区尺寸也越大。

式(12)表明,裂纹尖端撕开位移既与材料的粘弹性常数有关,又与 τ_0 和 τ_s 有关。图2的数值曲线表明随着 τ_0/τ_s 的增大,裂纹尖端撕开型位移 COD 急剧地增长。由此可见,两种材料的最小屈服极限 τ_s 对裂纹的扩展起主要的控制作用。

对于标准线性固体^[8],在(4)式中取级数前三项,得数值曲线图3,它反映了裂纹尖端张开位移 COD 随时间增长而作先快后慢地增长的趋势。

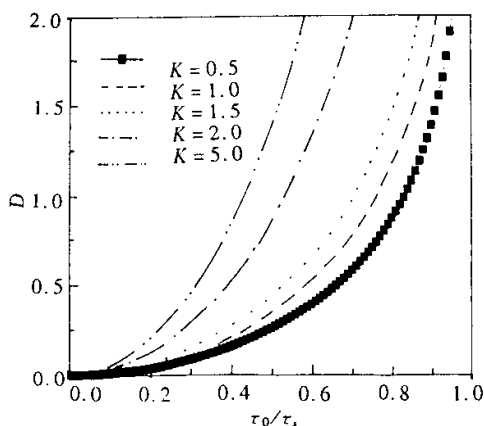


图2 裂纹尖端撕开位移 COD 随应力比变化值曲线。

$$D = \pi \delta \mu_1 / (8 a \tau_s), K = \mu_1 / \mu_2$$

Fig.2 Numerical curve of COD versus stress ratio

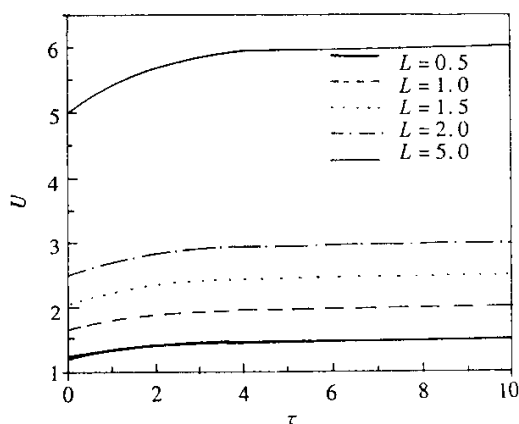


图3 裂纹尖端撕开位移 COD 随时间变化的数值曲线。

$$U = \pi \delta \{ 1 + v^{(1)} / \{ 2 E_0^{(1)} \tau_s a \ln [\sec(\pi \tau_0 / (2 \tau_s))] \} \}, \tau = \alpha_2^{(1)} t ;$$

$$\alpha_1^{(1)} / \alpha_2^{(1)} = 0.5, \alpha_1^{(2)} / \alpha_2^{(1)} = 1.0, \alpha_2^{(2)} / \alpha_2^{(1)} = 2.0 ;$$

$$E_1^{(1)} / E_0^{(1)} = 0.8, E_2^{(1)} / E_0^{(1)} = -0.3, E_0^{(2)} / E_0^{(1)} = 1.0, E_0^{(2)} = 0.8,$$

$$E_2^{(2)} / E_0^{(2)} = -0.3 ; L = E_0^{(1)} (1 + v^{(2)}) / [E_0^{(2)} (1 + v^{(1)})]$$

Fig.3 Numerical curve of COD versus time

参考文献:

- [1] 张淳源. 粘弹性断裂力学[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1994
- [2] Knauss W G. On Steady Propagation of a Crack in a Viscoelastic Sheet:Experiment and Analysis. In:Deformation and Fracture of High Polymers [M]. New York:Plenum Pr.,1974,501-541
- [3] Vincent P J, Gotham K V. Effect of Crack Propagation Velocity on the Fracture Surface Energy of Polymethylmeth-acrylate. Natur[Z]. 1966 210:1254-1260
- [4] Vitek V. A Theory of the Initiation of Creep Crack Growth[J]. Int. J. Fract.,1977,13(1):39-50
- [5] Williams J G., Ewing P D. Fracture under Complex Stress of the Angled Crack Problem[J]. Int. J. Fract. Mech.,1972,8(2):57-62
- [6] Xiao W S., Zeng Q Y. Dynamic Dugdale-Barenblatt Model for Interfacial Crack[J]. Int. J. Fracture,1997,86:L13-L15
- [7] 王铎主编. 断裂力学,上册[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,1989
- [8] 周光泉,刘孝敏. 粘弹性理论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1996

