文章编号：1001-2486（2001）02-0107-04

Van der Pol – Duffing 系统的非共振 Hopf 分叉*

彭解华[1]，唐驾时[1]，于德介[1]，李克安[2]

（1. 湖南大学机械与汽车工程学院，湖南 长沙 410082；2. 岳阳师范学院，湖南 岳阳 414000）

摘 要：用多尺度法求出了系统的一次近似平均方程和极坐标形成的分叉响应方程。研究了系统非共振情况下的平衡点性质和 Hopf 分叉，讨论了零解和极限环的稳定性

关键词：非线性振动系统；Hopf 分叉；极限环；稳定性

中图分类号：O322；O175　　文献标识码：A

Nonresonant Hopf Bifurcation of Van der Pol-Duffing Sytem

PENG Jie-hua[1]，TANG Jia-shi[1]，YU De-jie[2]，LI Ke-an[2]

（1. Hunan University，Changsha 410082；2. Yueyang Normal University，Yueyang 414000）

Abstract：In this paper，the problem of nonresonant bifurcation in nonlinerar oscillation system is studied，the response equation of bifurcation of the system is derived and the stability of Limit cycle is analyzed respectively.

Key words：nonliner oscillation；Hopf bifrucation；limit cycle，stability

Van der Pol-Duffing 振子是一种典型的非线性振动系统。因其重要的应用背景和丰富的动力学特性而一直受到人们的重视。对其分叉问题的研究已取得了许多成果[1-4]。但未见有关非共振情况下分岔研究的报道。

本文对 Van der Pol-Duffing 系统在参量激励下的非共振情况的分叉特性进行了研究。借助于多尺度法导出了系统的平均方程和极坐标形式的分叉响应方程；研究了定常解的稳定性。本文的结果表明，非共振情况下，参量激励的 Van der Pol-Duffing 振子在 $\mu=0$ 处发生 Hopf 分叉，并在一定的条件下存在稳定的极限环。

1　平均方程和分叉响应方程

考虑参量激励下的 Van der Pol – Duffing 系统

$$\ddot{x}+\omega^2x+\varepsilon[(\mu-ax^2)\dot{x}+\beta x^3+\gamma\cos\Omega t\cdot x]=0 \tag{1}$$

其中 $0<\varepsilon<1$，μ，α，β，γ 为常数。

用多尺度法求方程（1）的一次近似解，设

$$x(t,\varepsilon)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots\cdots \tag{2}$$

其中，$T_0=t$，$T_1=\varepsilon t$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}_0}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}_1}\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}=D_0+\varepsilon D_1 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2D_1^2 \tag{4}$$

又设 $\omega=n\Omega+\varepsilon\sigma$　(5)

当 $n=1，2，3，\cdots$ 时，系统发生主共振，超谐共振；当 $n=1/2，1/3，\cdots$ 时，系统发生亚谐共振；当 n 取其它值时，系统非共振。

* 基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（97JJY2075），湖南省教育厅留学归国人员基金资助项目
作者简介：彭解华（1955－），男，副教授，湖南大学在读博士生。

将式（2），（3），（4）和（5）代入方程（1），并令等式两边 ε 同次幂的系数相等，得下列微分方程组

$$D_0^2 x_0 + (n\Omega)^2 x_0 = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + (n\Omega)^2 x_1 = & -2D_0 D_1 x_0 - (\mu - \alpha x_0^2) D_0 x_0 \\ & - \beta x_0^3 - 2n\Omega\sigma x_0 - \gamma x_0 \cos\Omega T_0 \end{aligned} \tag{7}$$

……

设方程（6）的解为

$$x_0 = A(T_1) e^{in\Omega T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-in\Omega T_0} \tag{8}$$

代入方程（7），得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + (n\Omega)^2 x_1 = & [-2in\Omega D_1 A - (\mu - \alpha A\bar{A}) in\Omega A \\ & - 3\beta A^2 \bar{A} - 2n\Omega\sigma_1 A] e^{in\Omega T_0} + (in\Omega\alpha A^3 - \beta A^3) e^{\beta n\Omega t_0} \\ & - \frac{1}{2}\gamma A (e^{i(1+n)\Omega T_0} + e^{i(n-1)\Omega T_0}) + CC \end{aligned} \tag{9}$$

式中符号 CC 表示右端函数的共轭复数部分。要使解中不出现久期项，必须 $e^{in\Omega T_0}$的系数为零，即

$$D_1 A = \frac{1}{2}(\mu - \alpha A\bar{A})A + \frac{3}{2} i \frac{\beta}{n\Omega} A^2 \bar{A} + i\sigma A \tag{10}$$

设

$$A = \frac{1}{2}\alpha e^{i\varphi} \tag{11}$$

这里，$\alpha = \alpha$（T_1），$\varphi = \varphi$（T_1）为实函数，将（11）式代入方程（10），得到

$$a' e^{i\varphi} + ia\varphi' e^{i\varphi} = -\frac{1}{2}(\mu - \frac{\alpha}{4}a^2) a e^{i\varphi} + i(\frac{3}{8}\frac{\beta}{n\Omega}a^3 + \sigma a) e^{i\varphi}$$

消去公因子 $e^{i\varphi}$，并分离实部和虚部，得到一次近似下的极坐标形式的平均方程

$$\begin{cases} a' = -\frac{1}{2}(\mu - \frac{\alpha}{4}a^2) a \\ a\varphi' = \frac{3}{8}\frac{\beta}{n\Omega}a^2 + \sigma) a \end{cases} \tag{12}$$

令 $a' = 0$，得分叉响应方程

$$\frac{1}{2}(\mu - \frac{a}{4}a^2)\alpha = 0 \tag{13}$$

由此解得系统的定常解

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \quad \alpha > 0, \mu > 0, \text{或 } \alpha < 0, \mu < 0 \end{cases} \tag{14}$$

式（14）表明，当 $\alpha < 0$ 时，若 $\mu < 0$，系统有零解 $a = 0$ 和非零解 $a = 2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$；若 $\mu > 0$，只有零解。当 $\alpha > 0$，若 $\mu < 0$，系统只有零解；若 $\mu > 0$，系统既有零解，也有非零解。因而，系统在参数 $\mu = 0$ 处发生分叉。

2 定常解的稳定性

为研究定常解的稳定性，需要将方程（10）用直角坐标表示。令

$$A = u + iv \tag{15}$$

其中，$u = u$（T_1），$v = v$（T_1）是实函数。代入方程（10），得到

$$u' + iv' = -\frac{1}{2}[\mu - \alpha(u^2 + v^2)](u + iv)$$

$$+\frac{3}{2}i\frac{\beta}{n\Omega}(u^2+v^2)(u+iv)+i\sigma(u+iv) \tag{16}$$

将实部和虚部分离，得

$$\begin{cases} u'=-\dfrac{1}{2}\mu u-\sigma v+(\dfrac{1}{2}\alpha u-\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}v)(u^2+v^2) \\ v'=\sigma u-\dfrac{1}{2}\mu v+(\dfrac{1}{2}\alpha v-\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}u(u^2+v^2)) \end{cases} \tag{17}$$

方程组（17）的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\mu+\dfrac{1}{2}\alpha(3u^2+v^2)-\dfrac{3}{n}\dfrac{\beta}{\Omega}uv & -\sigma-\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}(u^2+v^2)+(\alpha u-\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}v)v \\ \sigma+\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}(u^2+v^2)+(\alpha v+\dfrac{3}{2n}\dfrac{\beta}{\Omega}u)v & -\dfrac{1}{2}\mu+\dfrac{1}{2}\alpha(u^2+3v^2)+\dfrac{3}{n}\dfrac{\beta}{\Omega}uv \end{bmatrix} \tag{18}$$

对于零解，即 $u=v=0$，Jacobi 矩阵简化为

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\mu & -\sigma \\ \sigma & -\dfrac{1}{2}\mu \end{bmatrix} \tag{19}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\mu\lambda+\frac{1}{4}\mu^2+\sigma^2=0 \tag{20}$$

由此得到零解对应的特征值为

$$\lambda=-\frac{\mu}{2}\pm i\,|\sigma| \tag{21}$$

根据特征值，可确定零解的稳定性。由式（21）知，当 $\mu<0$ 时 Re（λ）>0，因而零解是不稳定的，即原点是不稳定焦点。当 $\mu>0$ 时，Re（λ）<0，从而零解稳定，原点为稳定焦点。当 $\mu=0$ 时，Re（λ）$=0$，零解的稳定性可用下面的方法确定[5]。

设 $\mu=0$，Jacodi 矩阵 $\boldsymbol{D}_0$（μ）$|_{\mu=0}=\boldsymbol{D}_0$（0）的特征向量为 $\boldsymbol{C}_1+i\boldsymbol{C}_2$，则由

$$[\boldsymbol{D}_0(0)-\lambda(0)\boldsymbol{I}]\{\boldsymbol{C}_1+i\boldsymbol{C}_2\}=0 \tag{22}$$

求得，$\boldsymbol{C}_1=(1,-1)^T$，$C_2=(1,1)^T$，因而特征向量矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

以 P 为变换矩阵对方程组（17）作以下的线性变换：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\mathbf{P}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+z \\ z-y \end{bmatrix} \tag{24}$$

得到当 $\mu=0$ 时的标准形：

$$\begin{cases} y'=-\sigma z+f(y,z) \\ z'=\sigma y+g(y,z) \end{cases} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases} f(y,z)=(\alpha y-\dfrac{3}{n}\dfrac{\beta}{\Omega}z)(y^2+z^2) \\ g(y,z)=(\dfrac{3}{n}\dfrac{\beta}{\Omega}y+\alpha z)(y^2+z^2) \end{cases} \tag{26}$$

由此可以求得

$$\begin{aligned} C&=\frac{1}{16}(f_{yyy}+f_{yzz}+g_{yyz}+g_{zzz})+\frac{1}{16\sigma}[f_{yz}(f_{yy}+f_{zz})-g_{yz}(g_{yy}+g_{zz}) \\ &\quad -f_{yy}g_{yy}+f_{zz}g_{zz}]_{y=0,z=0} \\ &=\alpha \end{aligned} \tag{27}$$

据此，可确定 $\mu=0$ 时，零解的稳定性。当 $\alpha<0$ 时，$c<0$，零解稳定；当 $\alpha>0$ 时，$c>0$，零解不稳定。

以下判定非零解即极限环的稳定性，分两种情况讨论：

（1）$\alpha>0$，根据（14）式，极限环只存在于 $\mu>0$ 区域内，系统在 $\mu=0$ 处发生超临界 Hopf 分叉。根据前面的讨论，因 $\alpha>0$ 时，$\mu=0$ 处的零解（$\sigma=0$）不稳定，又 $\frac{d}{d\mu}Re(\lambda)]\Big|_{\mu=0}=-\frac{1}{2}<0$，根据 Hopf 分叉定理，Hopf 分叉产生不稳定的极限环。

（2）$\alpha<0$，根据（14）式，极限环只存在于 $\mu<0$ 区域内，系统在 $\mu=0$ 处发生亚临界 Hopf 分叉。因 $\alpha<0$ 时，$\mu=0$ 处零解稳定。又 $\frac{d}{d\mu}Re(\lambda)]\Big|_{\mu=0}=-\frac{1}{2}<0$，按 Hopf 分叉定理，Hopf 分叉产生稳定的极限环。

3 结论

（1）在非共振情况下，Van derPol – Duffing 系统在 $\mu=0$ 处发生 Hopf 分叉。所产生的极限环半径为 $2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$ 与用其他方法所得结果完全一致。

（2）在参数区域 $\mu<0$，$\alpha<0$ 的区域里，由 Hopf 分叉产生的极限环是稳定的；在其他区域，极限环不稳定。

参考文献：

[1] Baiaj A K. Resonant parametric perturbations of the Hopf bifurcation [J]. J. Math. Anal. Appl. 115，1986：214 – 224.

[2] Kath W L. Resonance in periodically perturbed Hopf bifurcation [J]. J. Appl. Math. 65，1981，95 – 112.

[3] 张伟，霍拳忠. 参数激励与强迫激励联合作用下非线性振动系统的分叉 [J]. 力学学报，1991，23（4）：464 – 474.

[4] 唐驾时，尹小波. 一类强非线性振动系统的分叉 [J]. 力学学报，1996，28（3）：363 – 369.

[5] 陆启韶. 分岔与奇异性 [M]. 上海科技教育出版社，1995.

[6] Guckenheimer J and Holmes P Nonlinear Oscillations. Dynamical systems and Bifurcation of Vector Fields [M]. New York.（1983）.