

文章编号: 1001-2486 (2001) 03-0001-04

## 弹性薄板的条形传递函数单元模型\*

李海阳, 雷勇军, 周建平

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 应用改进的条形传递函数方法, 建立了弹性薄板的二结线四自由度条形单元模型, 用于分析系统的静力响应。用结线将矩形区域划分为条形单元, 将边界结线离散, 以内部结线和边界结线的位移和转角为未知量, 采用三次插值, 得到能够与有限元单元耦合求解的超级单元。利用广义函数给出了一种精确积分方法, 可以得到有关矩阵的显式表达, 得到提高了求解精度和效率。

**关键词:** 半数值解析方法; 弹性薄板; 分布传递函数法; 有限元法

中图分类号: O242 文献标识码: A

## An Element Model with Strip Distributed Transfer Function Method for Elastic Thin Plates

LI Hai-yang, LEI Yong-jun, ZHOU Jian-ping

(College of Aerospace and Materials Engineering, National Univ. of Defense Tech, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Using modified strip distributed transfer function method, a strip element model with two nodal lines and four degrees of freedom is built for the analysis of static response. The rectangular region is divided into strips by nodal lines. The border lines are discrete. The displacements and angles of the inner lines and boundary nodes are unknown. An super element, which can couple with finite elements, is given using cubic interpolation. By using generalized function, an accurate integration method is developed to get the explicit formulation of the matrixes involved. This can improve the accuracy and efficiency of the method.

**Key words:** the semi-analytical method; elastic plates; distributed transfer function method; FEM

条形传递函数法<sup>[1,2]</sup>是一种新型的半数值解析方法,它具有自由度少、计算工作量节省、不需要预先选择半解析函数、可以求解较复杂的结构形式等优点。在相当的单元剖分情况下,它的精度比有限元和有限条高得多。在文献[3]中,作者提出了条形传递函数法的一种改进方法的原理,这种方法克服了原方法在适应边界条件方面的不足,使得不同矩形子域之间的拼接变得更为容易,而且可能与有限元方法联合使用,解决任意形状区域的问题,达到提高精度和节省计算工作量的目的。该方法的基本思想是将求解区域中的规则区域(如矩形、平行四边形、扇形等)分割出来,并用平行的直线(曲线)将其剖分成若干个条形单元(见图1)。在边界上定义若干个结点,边界结线位移用结点位移插值表示,内部结线位移则定义为结线坐标的未知函数。域内变形用结线变形的多项式插值表示。用变分方法导出结线位移满足的微分方程,该方程写成状态空间形式后,解用传递函数矩阵精确给出,并用结点位移表示,这种形式与有限元是相容的,因而可以将本方法和有限元方法耦合使用。

文献[3]只给出了求解问题的一些基本公式,没有涉及具体的建模和求解过程,鉴于条形传递函数方法的处理有一些自己的特点,为提高方法的精度与效率,需要对此进行一些深入研究。本文采用与有限元梁单元相同的形函数建立了弹性薄板的二结线四自由度离散模型,给出了文献[3]中各矩阵的具体形式,建立了各位移参数之间的数学关系,利用广义函数得到了各积分式的解析表达,提高了方法的效率和精度。

## 1 单元模型

考虑如图1所示的矩形区域 $\Omega$ ,沿 $y$ 向剖分为 $NS$ 个条形单元,用下标 $i$ ( $i=1,2,\dots,NS$ )标识。设单元宽度为 $b_i$ ,单元局部坐标为 $\xi$ 。

\* 收稿日期: 2000-09-10  
基金项目: 国家自然科学基金(19572027)和国家杰出青年科学基金(19925209)资助  
作者简介: 李海阳(1972-),男,在站博士后。

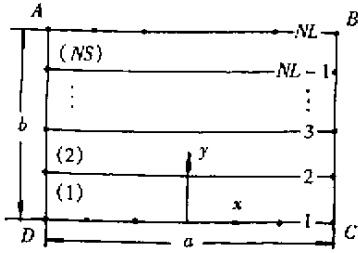


图 1 矩形域  $\Omega$  的条形单元剖分

Fig.1 Strip elements mesh of rectangular domain  $\Omega$

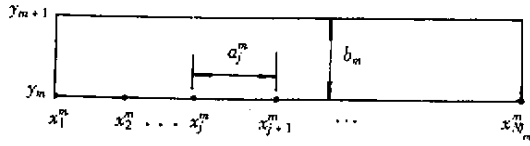


图 2 条形单元离散结点图

Fig.2 Discrete nodes of a strip element

分割条形单元的直线称为结线，总结线数  $NL = NS + 1$ 。对第  $m$  条结线离散，如图 2 所示（ $m$  通常取边界结线，不失一般性，本文取  $m$  为 1 和  $NL$ ）。离散结点数记  $N_m$ ，离散线段用下标  $j$  标识。设第  $j$  段离散结线宽度为  $a_j^m$ ，局部坐标为  $\rho$ 。

建立位移离散模型。条形单元  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, NS$ ) 中任意点的挠度由结线位移插值得到：

$$u(x, \xi) = N_i(\xi) \{ \Psi_i^T(x) \Psi_{i+1}^T(x) \}^T \Psi_i(x) = \{ w_i(x) \theta_i(x) \}^T \quad (1)$$

其中  $w_i(x)$ 、 $\theta_i(x)$  分别为第  $i$  条结线的位移和转角， $\theta_i(x) = \partial w(x, \xi) / \partial y |_{y=y_i}$ 。  $N_i(\xi)$  为  $y$  向形函数：

$$N_i(\xi) = [ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad b(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad b(-\xi^2 + \xi^3) ] \quad (2)$$

本文方法直接把解析结线的位移函数作为未知量求解，而离散结线则取离散结点位移作未知量。离散结线位移则由离散结点位移插值得到， $m$  结线的第  $j$  段内任意点位移可表示为：

$$\Psi_m(x) = \{ N_j^m(\rho) \{ d_{mj}^0 \mathbf{d}_{n(j+1)}^0 \}^T \quad N_j^m(\rho) \{ d_{mj}^1 \mathbf{d}_{n(j+1)}^1 \}^T \}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_{mj}^0 = \{ w_{mj} \quad w_{x,mj} \}; \quad \mathbf{d}_{mj}^1 = \{ \theta_{mj} \quad \theta_{x,mj} \}; \quad w_{x,mj} = \partial u(x, y) / \partial x |_{x=x_j^m, y=y_m}$$

其中  $w_{mj}$ 、 $\theta_{mj}$  分别为离散结点  $x_j^m$  处的位移和转角， $\theta_{x,mj}$  与  $w_{x,mj}$  定义类似。  $N_j^m(\rho)$  为  $x$  向形函数：

$$N_j^m(\rho) = [ 1 - 3\rho^2 + 2\rho^3 \quad a_j^m(\rho - 2\rho^2 + \rho^3) \quad 3\rho^2 - 2\rho^3 \quad a_j^m(-\rho^2 + \rho^3) ] \quad (4)$$

进一步处理需要将以上位移离散模型转化到坐标系  $xoy$  中表示，为此定义总位移矢量：

$$\text{非离散结线位移矢量 } \Psi : \Psi = \{ \Psi_2^T \quad \Psi_3^T \dots \Psi_{NL-1}^T \}^T$$

$$\text{总结线位移函数矢量 } \Psi^* : \Psi^* = \{ \Psi_1^T \quad \Psi_2^T \dots \Psi_{NL}^T \}^T$$

$$\text{离散结线总结点位移矢量 } \mathbf{d}_m : \mathbf{d}_m = \{ \mathbf{d}_{m1}^{0T} \dots \mathbf{d}_{m/NLm}^{0T} \quad \mathbf{d}_{m1}^{1T} \dots \mathbf{d}_{m/NLm}^{1T} \}^T \quad (5)$$

为便于表示分段函数和推导，引入以下函数和矩阵：

$H(x)$  —— 阶跃函数；

$\delta(x)$  ——  $\delta$ -函数

$I_n$  ——  $n \times n$  维单位矩阵；

$O_{mn}$  ——  $m \times n$  维零矩阵

$\mathbf{D}_1^* = [ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 ]$ ，维数为  $1 \times NL-2$ ；  $\mathbf{D}_{NL}^* = [ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 ]$ ，维数为  $1 \times NL-2$

$\bar{H}_j^m(x) = H(x - x_j^m) - H(x - x_{j+1}^m)$ ；  $\bar{\delta}_j^m(x) = \delta(x - x_j^m) - \delta(x - x_{j+1}^m)$

$\bar{H}_i(x) = H(y - y_i) - H(y - y_{i+1})$

注意到  $N_i(\xi)$  是在单元  $i$  中定义的，而  $N_j^m(\rho)$  则定义在结线  $m$  的第  $j$  个区间（参见文献 [3] 式 (2), (3)）。现将其定义域扩展为整个矩形区域，分别记为  $N_i(\xi)$ 、 $N_j^{m*}(\rho)$ ：

$$N_i^*(\xi) = N_i(\xi) \bar{\mathbf{D}}_i; \quad N_j^{m*}(\rho) = N_j^m(\rho) \bar{\mathbf{D}}_{mj} \quad (7)$$

其中

$$\bar{\mathbf{D}}_i = [ \mathbf{O}_4 \quad \mathbf{I}_{i-1} \quad \mathbf{I}_4 \quad \mathbf{O}_4 \quad \mathbf{I}_{NL-i-1} ]; \quad \bar{\mathbf{D}}_{mj} = [ \mathbf{O}_4 \quad \mathbf{I}_{j-1} \quad \mathbf{I}_4 \quad \mathbf{O}_4 \quad \mathbf{I}_{NL_m-j-1} ]$$

则挠度  $w(x, y)$  和离散结线位移向量  $\Psi_m(x)$  在整体坐标内可以写成

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{NL-1} \bar{H}_i(y) N_i^*(\xi) \Psi^*(x) \quad (8a)$$

$$\Psi_m(x) = \mathbf{I}_2 \otimes \sum_{j=1}^{N_m-1} (\mathbf{N}_j^m(\rho) \bar{\mathbf{H}}_j^m(x)) \mathbf{d}_m \quad (8b)$$

式中 $\otimes$ 表示克罗内克积。

文献[3]中定义的条形单元的刚度矩阵 $k_{pq}^i$  ( $p, q = 0, 1, 2$ )，可由离散模型(1)代入总势能得到

$$k_{00}^i = D_{22} \frac{1}{b_i^3} \bar{k}_{00}^i; \quad k_{02}^i = D_{12} \frac{1}{b_i} \bar{k}_{02}^i; \quad k_{11}^i = D_{66} \frac{4}{b_i} \bar{k}_{11}^i; \quad k_{22}^i = D_{11} b_i \bar{k}_{22}^i \quad (9)$$

其中 $k_{00}^i, k_{02}^i, k_{11}^i, k_{22}^i$ 为只与 $b_i$ 有关的常矩阵， $p, q$ 为其他组合时 $k_{pq}^i = \mathbf{O}_{4 \times 4}$ 。将 $k_{pq}^i$ 矩阵分解为四个 $2 \times 2$ 的矩阵，分别记为 $k_{pq}^{(1)}, k_{pq}^{(2)}, k_{pq}^{(3)}, k_{pq}^{(4)}$ ，可以得到离散结线结点的刚度矩阵函数 $k^1, k^{NL}$ 和矩阵刚度函数 $k_0^1(x), k_1^1(x), k_2^1(x), k_0^{NL}(x), k_1^{NL}(x)$ ，比如

$$k_1^1 = \mathbf{D}_1^* \otimes \left( k_{11}^{(2)} \otimes \sum_{j=1}^{N_1-1} \left( \frac{1}{a_j} \frac{d}{d\rho} \bar{\mathbf{H}}_j^1(x) \mathbf{N}_j^1(\rho) \mathbf{D}_{1j} \right)^T \right) \quad (10)$$

至此可以按文献[3]中提出的方法组集各矩阵，得到状态方程并求解，从而获得问题的解答。但由于 $k_0^1(x), k_1^1(x), k_2^1(x), k_0^{NL}(x), k_1^{NL}(x)$ 都是结线坐标 $x$ 的函数，而文献[3]中式(25)的积分项都是对函数矩阵的积分，用数值积分方法既难以实现又影响效率和精度，所以需要进行一些特殊处理，得到积分的精确形式。

## 2 精确积分方法

文献[3]中式(23) (25)中的积分形式有一定的相似性。它们都可以写成域内传递函数矩阵 $\mathbf{G}(x, \xi)$ 的加权积分 $\int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) f(\xi) d\xi$ 形式，而 $f(x)$ 都为分段幂函数矩阵，而本文模型中幂函数最高为三次，因此只需要得到有限几个加权积分就可以得到以上积分的显式表达。以 $\mathbf{H}_l(x)$ 为例：

$$\mathbf{H}_l(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) \bar{\mathbf{k}}_l(\xi) d\xi \quad (11)$$

首先要对 $\bar{\mathbf{k}}_l(x)$ 进行处理，将形函数的局部坐标 $\rho$ 用坐标 $x$ 表示。形函数(4)可改写为

$$\mathbf{N}_j^m(\rho) = \mathbf{N}_{m,0}^j + \mathbf{N}_{m,1}^j x + \mathbf{N}_{m,2}^j x^2 + \mathbf{N}_{m,3}^j x^3 \quad (12)$$

将其代入 $k_0^1(x), k_1^1(x), k_2^1(x), k_0^{NL}(x), k_1^{NL}(x)$ 各式，再代入文献[3]中的式(17) (20)可得

$$\bar{\mathbf{k}}_l(x) = \sum_{m=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_m} [(\bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m0} + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m1} x + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m2} x^2 + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m3} x^3) \bar{\mathbf{H}}_j^m(x) + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m4} \delta_j^{m'}(x) + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m5} \delta_j^{m'}(x) x + \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m6} \delta_j^{m'}(x)] \quad (13)$$

其中 $\bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m0}, \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m1}, \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m3}, \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m4}, \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m5}, \bar{\mathbf{k}}_{lj}^{m6}$ 为常数矩阵。

将(13)式代入(11)可得到四种形式的积分

$$\text{形式 1: } \mathbf{S}_1(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) \xi^m \bar{\mathbf{H}}_j^m(\xi) d\xi; \quad \text{形式 2: } \mathbf{S}_2(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) \bar{\delta}_j^m(\xi) d\xi$$

$$\text{形式 3: } \mathbf{S}_3(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) \bar{\delta}_j^{m'}(\xi) \xi d\xi; \quad \text{形式 4: } \mathbf{S}_4(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{G}(x, \xi) \bar{\delta}_j^m(\xi) \xi d\xi$$

这四种积分可以通过分部积分得到解析表达，比如

$$\mathbf{S}_4(x) = \mathbf{H}_D(x) [\mathbf{H}_D^-(x_j^m) \mathbf{H}(x - x_j^m) - \mathbf{H}_D^-(x_{j+1}^m) \mathbf{H}(x - x_{j+1}^m) + \mathbf{N}(-e^{-F(x_j^m - a/2)} + e^{-F(x_{j+1}^m - a/2)})] \quad (14)$$

式中 $\mathbf{H}_D, \mathbf{N}, F$ 的定义见文献[3]中的(20) (21) (23)式。

将以上积分结果代入(11)即可得到代数表达式

$$\begin{aligned}
 H(x) = & \sum_{m=1}^{N_m-1} \sum_{NL, j=1}^{m-1} (-(a_{0j}^m + a_{1j}^m x + a_{2j}^m x^2 + a_{3j}^m x^3) \bar{H}_j^m(x) + H_I(x) b_{0j}^m H(x-x_i) - H_I(x) b_{1j}^m H(x-x_{i+1})) \\
 & + H_I(x) b + \sum_{m=1}^{N_m-2} \sum_{NL, j=2}^{m-1} (c_{0j}^m \delta(x-x_j^m) + c_{1j}^m \delta(x-x_i) x + H_I(x) c_{2j}^m H(x-x_i) + H_I(x) c_{3j}^m)
 \end{aligned}$$

其中系数矩阵  $a_{0j}^m, a_{1j}^m, a_{2j}^m, a_{3j}^m, b, b_{0j}^m, b_{1j}^m, c_{0j}^m, c_{1j}^m, c_{2j}^m, c_{3j}^m$  为常矩阵。

以上以  $H_I(x)$  的化简为例,介绍了精确求解域内传递函数积分的方法。根据文献[3]和本文的结果可以建立结点位移与单元受力之间的关系,把矩形区域作为广义单元,用类似有限元的方法可以将单元组集,用于复杂区域问题的求解,若将其与有限元单元结合则可以用于任意边界条件和形状的弹性薄板问题的分析。

为了验证本文方法的精度和收敛性,给出一个算例。考虑一个矩形悬臂方板,坐标系、尺寸定义和单元离散模型如图1所示,板的AD边固支,其它边自由,在角点B( $x=a/2, y=b$ )受一 $z$ 向集中力 $P$ 作用,矩形板边长取 $a=b$ 。归一化计算结果列于表1,其中 $w$ 为挠度, $M_x, M_y$ 为弯矩, $D$ 为抗弯刚度,有限元结果由NASTRAN软件得到。可以看出本文方法只需要选取少量单元就可以达到较高的精度。

表1 悬臂方板角点受集中载荷

Tab.1 Cantilever square plate subjected to concentrated load at one corner

方法	网格	$wD/(Pa^2)$	$-M_x/P$	$-M_y/P$	$-M_x/P$	$-M_y/P$
		点( $a/2, b$ )	点( $-a/2, b/2$ )	点( $0, 0$ )	点( $0, b/2$ )	点( $0, b/2$ )
FEM	$40 \times 40$	0.4908	1.0347	0.3162	0.4813	0.1722
本文解 NS=4	NI=2	0.4841	1.0143	0.3043	0.4785	0.1899
	NI=4	0.4900	1.0406	0.3122	0.4838	0.1795
	NI=6	0.4906	1.0465	0.3139	0.4836	0.1795
本文解 NI=6	NS=2	0.4899	1.0088	0.3026	0.4864	0.1929
	NS=3	0.4904	1.0408	0.3122	0.4787	0.1640
	NS=5	0.4906	1.0421	0.3126	0.4805	0.1690
	NS=7	0.4907	1.0433	0.3130	0.4810	0.1705

注: NS—条形单元数, NI—离散结线上结点数。

### 3 结论

文献[3]中提出一种新的半数值解析方法,它是文献[1]中所提出的条形传递函数方法的进一步改进和提高。该方法适用于任意边界条件下矩形板的变形分析问题,并且可以作为广义单元与有限单元拼接,处理任意形状区域的问题。本文从该方法出发建立了弹性薄板的二结线四自由度离散模型,给出了单元的数学描述和积分项的精确处理方法。本文方法提供了条形传递函数方法的一种有效的实现手段,在工程中具有实际应用价值。本方法可进一步用于屈曲、振动等特征值问题以及频率响应、瞬态响应的分析,类似也可将其推广到其他二维和三维问题的分析。

### 参考文献:

- [1] Yang B, Zhou J. Semi-analytic Solution of 2D Elasticity Problem by The Strip Distributed Transfer Function Method[J]. Int. J. Solid Structures, 33, 1996, 3983-4005.
- [2] Zhou J, Yang B. Strip distributed transfer function method for analysis of plates[J]. Int J for Numerical methods in engineering, 1996, 39(27): 3938-4005.
- [3] 周建平, 李海阳, 李爱丽. 弹性薄板分析的条形传递函数方法[J]. 力学学报, 1999, 5, 31(3), 320~329.

