

文章编号: 1001-2486 (2001) 03-0040-04

基于差分法的二阶微分方程的模糊边值问题^{*}

吴 强

(国防科技大学工程兵学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 本文讨论二阶微分方程的两点边值具有模糊不确定性时, 运用模糊仿真原理和差分方法, 求其边值问题的数值解法。

关键词: 二阶微分方程; 边值问题; 模糊仿真; 数值解

中图分类号: O241.81; O159 **文献标识码:** A

The Fuzzy Boundary Value Problem for Differential Equation of Second Order Based on the Difference Method

WU Qiang

(College of Military Engineering, National Univ of Defense Technology, Changsha 410072, China)

Abstract: We consider the numerical solution to the boundary value problem, using a method of fuzzy simulation based on difference method, while discussing the differential equation of the second order in fuzzy boundary value condition.

Key words: differential equation of second order; boundary value problem; fuzzy simulation; numerical solution

1 问题的提出

对于一般二阶微分方程的二点边值问题:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt}) \\ x(a) = A, x(b) = B \end{cases} \quad (1)$$

在一定的条件下, 可以证明其解的存在唯一性. 事实上, (1) 式等价于 (2) 式:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = (a-t)f(t, x, \dot{x}) \triangleq F_1(t, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = (b-t)f(t, x, \dot{x}) \triangleq F_2(t, y_1, y_2) \\ y_1(a) = A, y_2(b) = B \end{cases} \quad (2)$$

则有如下结论^[1]:

若 $F_1(t, y_1, y_2)$ 及 $F_2(t, y_1, y_2)$ 在区域:

$$D = \{ (t, y_1, y_2) \mid a \leq t \leq b, |y_1 - A| \leq h, |y_2 - B| \leq h \}$$

上是连续的, 且关于 y_1, y_2 满足李普希兹条件, 即存在常数 $N > 0$, 使得当 $(t, y_1, y_2) \in D$ (t, z_1, z_2) $\in D$ 时, 有下不等式成立:

$$|F_i(t, y_1, y_2) - F_i(t, z_1, z_2)| \leq N(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) \quad (i = 1, 2)$$

则当 $0 < b - a \leq r \leq h/M, Nr < 1$ 时, 边值问题 (2) 的解存在且唯一, 这里:

$$M = \max_{(t, y_1, y_2) \in D} |F_i(t, y_1, y_2)| \quad (i = 1, 2)$$

但要求出解的明确表达式较为困难, 在实际应用中, 不能用分析形式求解的方程绝大多数都能用

* 收稿日期: 2000-10-11

基金项目: 国防科技大学军事学术研究项目资助

作者简介: 吴强 (1964-), 男, 副教授。

近似、离散的方法（如打靶法、差分法等）借助于计算机求得其数值解。在许多由实际问题抽象出来的数学模型中，其边值条件往往呈现出模糊不确定性，直接运用一些典型的数值解法自然无从下手。基于此，本文考虑(1)的边值条件“ $\tilde{x}(a) = A, \tilde{x}(b) = B$ ”具有模糊不确定性时，运用模糊仿真原理和差分法，求其数值解的一种新方法。

2 差分解法^[15]

对(1)式稍作变形，可得等价的边值问题：

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = A, x(b) = B \end{cases} \quad (3)$$

基于本文讨论的模糊仿真算法，这里主要讨论下列形式二阶变系数微分方程的两点边值问题：

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t) \\ x(a) = A, x(b) = B \end{cases} \quad (4)$$

用差分法可得到(4)的解为：

$$x_i = \frac{1}{(2 + p_i h^2) - u_{i-1}} x_{i+1} + \frac{v_{i-1} - q_i h^2}{(2 + p_i h^2) - u_{i-1}} \triangleq u_i x_{i+1} + v_i \quad (5)$$

其中：

$$u_i = \frac{1}{(2 + p_i h^2) - u_{i-1}}, \quad v_i = u_i (v_{i-1} - q_i h^2)$$

$$u_1 = \frac{1}{2 + p_1 h^2}, \quad v_1 = u_1 (A - q_1 h^2)$$

3 模糊数的扩展运算

1975年，库夫曼提出了模糊数的概念，尤其是扎德的可能性理论提出以后，模糊数及模糊数的运算得到广泛的应用，我们用扩展原理给出模糊数的运算法则。

设 $x \rightarrow y$ 是变通的点函数， $A \in F(X)$ ，所谓 f 在模糊集类上的扩展，是指这样的两种映射：

$$\begin{aligned} f: F(X) &\rightarrow F(Y) & A &\rightarrow f(A) \in F(Y) \\ f^{-1}: F(Y) &\rightarrow F(X) & B &\rightarrow f^{-1}(B) \in F(X) \end{aligned}$$

其隶属函数分别为：

$$f(A)(y) \triangleq \bigvee_{x: y=f(x)} A(x), \quad f^{-1}(B)(x) \triangleq B(f(x))$$

$f(A)$ 叫做 A 在 f 之下的像， $f^{-1}(B)$ 叫做 B 在 f 之下的原像。由扩展原理可知， X 到 Y 的一个映射 f 扩展为 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的一个映射，那么它就是 X 到 Y 的模糊变换。设 $X = R$ 为实数集， X 上的全体模糊数记为 $F(X)$ ，下面给出运算法则。

设任意的 $\underline{p}, \underline{q} \in F(X)$ ， $\underline{p} * \underline{q}$ 仍是一个模糊数，则定义对任意的 $z \in X$ ，有：

$$(\underline{p} * \underline{q})(z) = \bigvee_{x+y=z} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(y)) \quad (6)$$

考虑“+、-、·、÷”四种运算，(6)式可分解为：

$$\begin{aligned} (\underline{p} + \underline{q})(z) &= \bigvee_{x+y=z} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(y)) = \bigvee_{x \in X} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(z-x)) \\ (\underline{p} - \underline{q})(z) &= \bigvee_{x-y=z} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(y)) = \bigvee_{x \in X} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(x-z)) \\ (\underline{p} \cdot \underline{q})(z) &= \bigvee_{x \cdot y=z} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(y)) \\ &= \begin{cases} \bigvee_{x \in X} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(\frac{z}{x})) & (z \neq 0) \\ \bigvee_{x \in X} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(0)) \vee (\bigvee_{y \in X} (\underline{q}(y) \wedge \underline{p}(0))) & (z = 0) \end{cases} \\ (\underline{p} \div \underline{q})(z) &= \bigvee_{x \div y=z} (\underline{p}(x) \wedge \underline{q}(y)) \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{y \in \sup \tilde{q}} (\tilde{p}(yz) \wedge \tilde{q}(y)) \quad (0 \notin \sup \tilde{q})$$

不难验证，模糊数之间的运算法则满足加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、次分配律，加法存在 0 元，乘法存在单位元 1，0 不能作除数。显然，一般模糊数的运算十分复杂，若将其论域离散化，将大大简化其计算过程。

4 数值求解

当 (4) 式的边值条件 $x(a)$ 、 $x(b)$ 为模糊集 A 、 B 时，一个自然的想法是利用模糊集的扩展原理，将 (5) 式中的算术运算改成模糊数的运算。由模糊数的运算法则和性质知，当参数 t 较大时，系统仿真输出的结果幅宽会相当大，使得信息浓度下降，这种情况对具有稳定性的系统也是如此。显然，简单的采用扩展原理，得不到有效的仿真结果。我们应用文献 [2~4, 6] 中的模糊近似推理规则和模糊仿真原理，假设 A 、 B 均为一三角模糊数，应用差分方法，求解如下形式的边值问题：

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t) \\ x(a) = A, x(b) = B \end{cases} \quad (7)$$

设 A 是论域 V 上的一个模糊集，称：

$$V_0 = \{v_0 \mid \mu_A(v_0) > 0, v_0 \in V\}$$

为 A 的有效论域，记：

$$V_1 = \{v_1 \mid v_1 = u_1(v_0 - q_1 h^2), v_0 \in V_0\}$$

对任意的 $(v_0, v_1) \in V_0 \times V_1$ ，令：

$$r(v_0, v_1) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_1 = u_1(v_0 - q_1 h^2) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 $R_0 = \{r(v_0, v_1) \mid (v_0, v_1) \in V_0 \times V_1\}$ 是 $V_0 \times V_1$ 上的模糊关系。我们设 $V_i = \{v_i\}$ 为已知，令：

$$V_{i+1} = \{v_{i+1} \mid v_{i+1} = u_{i+1}(v_i - q_{i+1} h^2), v_i \in V_i\} \quad (8)$$

$$r(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_{i+1} = u_{i+1}(v_i - q_{i+1} h^2) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

称

$$R_i = \{r(v_i, v_{i+1}) \mid (v_i, v_{i+1}) \in V_i \times V_{i+1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

为基于差分运算的模糊关系，设 $v_i \in V_i$ 是一模糊集，则下一时刻的模糊状态为：

$$\mu_{V_{i+1}}(v_{i+1}) = \sup_{v_i \in V_i} \{\mu_{V_i}(v_i) \wedge r(v_i, v_{i+1})\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

当 A 退化为有效论域只有一个元素时，用上列算式计划的结果与差分方法显然一致，由于差分公式只提供了一个确定关系曲线（由若干个离散的点连接而成），将其拓广为区间值曲线（具有一定的幅宽）时，我们约定，把区间值其余部分的隶属度值取为 0，而且可以证明，当 $h \rightarrow 0$ 时，仿真结果愈接近实际状态（我们总假定精确解是存在的）。在上述的计算过程中， p_i 、 q_i 、 u_i 为任意实数，如果它们亦为模糊数时，可直接运用模糊数的扩展运算，产生出刻划系统状态的模糊关系来，其相应的模糊集存在大量的隶属度介于 0 ~ 1 之间的元素。

当 v_k 的模糊状态描述出来以后，进行“赶”的过程：

$$\tilde{x}_i = u_i \tilde{x}_{i+1} + v_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$\text{当 } i = n \text{ 时, } \tilde{x}_{n+1} = B$$

此时运用模糊数的扩展运算和递推关系，最终得到刻划模糊二点边值问题的数值状态。

5 数值实例

求解模糊二点边值问题：

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{2}{t^2 + 1}x \\ x(0) = A = 0.0/0.90 + 1.0/1.00 + 0.0/1.10, x(1) = B = 0.0/1.85 + 1.0/2.00 + 0.0/2.15 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$ ，可得方程组：

$$\begin{cases} x(0) = A = 0.0/0.90 + 1.0/1.00 + 0.0/1.10 \\ x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = 0.01 \cdot \frac{2}{1 + t_i^2}x_i \quad (i = 1, 2, \dots, 9) \\ x(1) = B = 0.0/1.85 + 1.0/2.00 + 0.0/2.15 \end{cases}$$

当 $i = 1, 2, \dots, 9$ 时，有关实参数计算如下：

$$\begin{aligned} t_i &= \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \\ p_i &= \{1.980, 1.923, 1.835, 1.724, 1.600, 1.471, 1.342, 1.220, 1.105\} \\ q_i &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ u_i &= \{0.495, 0.656, 0.734, 0.779, 0.809, 0.829, 0.841, 0.856, 0.866\} \end{aligned}$$

应用本文介绍的模糊仿真算法， A 的有效论域记为 $V_0 = \{0.9, 1.0, 1.1\}$ ，将 0.9、1.0、1.1 分别代入“追”的计划公式，由 (8) 式可得：

$$v_1 = 0.0/0.446 + 1.0/0.495 + 0.0/0.545$$

依此类推，有：

$$\begin{aligned} v_2 &= 0.0/0.293 + 1.0/0.325 + 0.0/0.358 & v_3 &= 0.0/0.215 + 1.0/0.239 + 0.0/0.263 \\ v_4 &= 0.0/0.167 + 1.0/0.186 + 0.0/0.205 & v_5 &= 0.0/0.135 + 1.0/0.150 + 0.0/0.166 \\ v_6 &= 0.0/0.112 + 1.0/0.124 + 0.0/0.138 & v_7 &= 0.0/0.095 + 1.0/0.106 + 0.0/0.116 \\ v_8 &= 0.0/0.081 + 1.0/0.091 + 0.0/0.099 & v_9 &= 0.0/0.070 + 1.0/0.079 + 0.0/0.086 \end{aligned}$$

于是可得：

$$\begin{aligned} x_{10} &= B = 0.0/1.85 + 1.0/2.00 + 0.0/2.15 & x_9 &= 0.0/1.672 + 1.0/1.811 + 0.0/1.948 \\ x_8 &= 0.0/1.492 + 1.0/1.641 + 0.0/1.766 & x_7 &= 0.0/1.354 + 1.0/1.491 + 0.0/1.607 \\ x_6 &= 0.0/1.234 + 1.0/1.360 + 0.0/1.470 & x_5 &= 0.0/1.133 + 1.0/1.250 + 0.0/1.355 \\ x_4 &= 0.0/1.049 + 1.0/1.160 + 0.0/1.261 & x_3 &= 0.0/0.985 + 1.0/1.090 + 0.0/1.189 \\ x_2 &= 0.0/0.939 + 1.0/1.040 + 0.0/1.138 & x_1 &= 0.0/0.911 + 1.0/1.010 + 0.0/1.108 \end{aligned}$$

从本例可以看出，无论是“追”还是“赶”的过程，其运算都是收敛的。

参考文献：

- 1 金福临，阮炯，黄振勋．应用常微分方程 [M]．上海：复旦大学出版社，1991.
- 2 黄崇福．模糊仿真的近似推理方法 [J]．兰州大学学报，1986，32 (Suppl): 275 ~ 281.
- 3 黄崇福，王家鼎．模糊信息分析与应用 [M]．北京师范大学出版社，1992.
- 4 贾利民，吴连传，张锡弟．模糊仿真—定性模型的建立与辩识 [J]．计算机仿真，1994，38 (1): 14 ~ 25.
- 5 秦林祥，杨泰敏．计算方法 [M]．北京：兵器工业出版社，1992.
- 6 Dubis D, H Drade. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application [M]．Academic Press, 1980.

