国 防 科 技 大 学 学 报

第 23 卷 第 3 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.23 No.3 2001

文章编号:1001-2486(2001)03-0098-05

基于随机加权法的 BAYES 精度评定*

张湘平,张金槐,谢红卫　　曹国敏,张振泰,钟世勇

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南 长沙　410073)　(航天机电集团二院四部,北京　100854)

摘　要:从工程应用的角度出发,在极小现场子样条件下,讨论了如何利用验前信息与现场子样来对导弹的命中精度进行评定,将随机加权法与 BAYES 方法结合起来,提出了基于随机加权法的 BAYES 精度评定方法,并通过算例证实了方法的正确性。

关键词:随机加权法;小子样;BAYES 方法

中图分类号:TN914　　文献标识码:A

Research of Bayes Accuracy Assessment Based on Stochastic Weighted Method

ZHANG Xiang-ping, ZHANG Jin-huai, XIE Hong-wei

(College of Mechaeronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

CHAO Guo-min, ZHANG Zen-tai, ZHONG Shi-yong

(4th general department, 2rd Research Academy, Group of Spaceflight Mechatronics Engineering, Beijing, 100854,China.)

Abstract: The problem of missile hit accuracy assessment is studied by using prior information and extra-small field samples. Based on Bayes theory and stochastic weighted method, a new method of accuracy assessment has been put forward and validated by some calculated examples.

Key words: stochastic weighted method; small sample; Bayes method

1　问题叙述

当前,在国防科技领域运用 BAYES 小子样理论,对武器系统的可靠性指标或精度指标进行评定已经成为了一种时尚。考虑到工程实际中的一些特殊情况,比如:定型试验只有 1 个或 3~5 个现场子样,所以,在这种极小现场子样的条件下,研究此类问题就显得很有意义。众所周知,自助法和随机加权自助法是将子样信息'提携'的方法(或称之为将子样信息'拔高'的方法)。这种方法过去已在某些武器装备试验鉴定中应用,获得了较好的结果。且实际应用和仿真计算表明:随机加权法较自助法有较高的精确度。

2　应用随机加权法进行点估计

2.1　原理与步骤

设 X 为描述现场导弹落点情况的随机变量,它表示以瞄准点为原点的导弹落点的纵向或横向偏差,一般来说,现场子样的总体服从正态分布,且导弹落点的纵向或横向偏差相互独立。

记:$\boldsymbol{X}_n=(x_1,\cdots,x_n)$为现场子样,$\mu,\sigma^2$ 分别为 X 的未知期望值和方差,运用上述随机加权自助法可对现场子样的分布参数 μ,σ^2 进行估计。具体步骤如下:

STEP1:计算现场子样的均值和方差,即有:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

STEP2:产生 N 组 Diricklet 随机向量,$\boldsymbol{V}_{(i)}=(V_{i1},\cdots,V_{in})$,$i=1,\cdots,N$,这里$(V_{i1},\cdots,V_{in})$为参数为

* 收稿日期:2000-12-07
基金项目:国家部委基金项目资助(2000J19.2.3.KG0132)
作者简介:张湘平(1963-),男,副教授,在职博士生。

$(1,\cdots,1)$的 Diricklet 随机向量,记它的联合分布为:$D_n^{(i)}(1,\cdots,1)$。它可按如下方法产生:

设 $v_1,\cdots,v_{n-1}$是$(0,1)$上均匀分布的随机变量 v 的 $i.i.d$ 子样,按由小到大的次序重新排序,记它们为 $v_{(1)}\leqslant v_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant v_{(n-1)}$。又记 $v_{(0)}=0,v_{(n)}=1,V_{ij}=v_{(j)}-v_{(j-1)},j=1,\cdots,n$。那么,$(V_{i1},\cdots,V_{in})$的联合分布就是 $D_n^{(i)}(1,\cdots,1)$。它就是我们所需要的 Diricklet 随机向量。

STEP3 计算出 N 组随机加权子样 $D_n^{(1)}(i),D_n^{(2)}(i),i=1,\cdots,N$,此处:

$$D_n^{(1)}(i)=\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_i-\bar{x},D_n^{(2)}=\frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}(x_i-\bar{x})^2,i=1,\cdots,N.$$

STEP4 分布参数 μ,σ^2 的估计分别为:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-D_n^{(1)}(i))=\bar{x}-\bar{D}_n^{(1)},\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{n}{n-1}S^2-D_n^{(2)}(i)\right]=\frac{n}{n-1}S^2-\bar{D}_n^{(2)}$$

上式中,$\bar{D}_n^{(i)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}D_n^{(1)}(i),\bar{D}_n^{(2)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}D_n^{(2)}(i)$,且 N 可以为任意大的自然数。

2.2 算例

假设导弹的系统性偏差较大,而随机性偏差较小,由正态分布 $N(30,1)$随机产生三个落点偏差样本,即有:$X_3=(29.4117,32.1832,29.8636)$,分别取 N 为:100、200、300,应用随机加权法对分布参数 μ,σ^2 进行估计。估计结果为:$N=100,\mu=30.5637,\sigma^2=2.246$;$N=200,\mu=30.4581,\sigma^2=2.1797$;$N=300$,$\mu=30.3957,\sigma^2=2.1320$。可见,随机加权法所估计的结果是可信的。

3 P_{H_0}的计算

就我们所研究的问题,若作下列简单假设:

$$H_0: CEP=CEP^*$$
$$H_1: CEP=\lambda CEP^*$$

其中,CEP^*为指定指标,$\lambda>1$。

为了讨论方便,设验前子样为$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$,一般来讲,可通过下面两种方法来计算 P_{H_0}。

最常见的方法是运用 BAYES 相继律,由 BAYES 公式:

$$P(H_0\mid(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)}))=\frac{P_{H_0}^{(0)}P(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)}\mid H_0)}{P_{H_0}^{(0)}P(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})+(1-P_{H_0}^{(0)})P(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)}\mid H_1)}$$

式中,$CEP_1=\lambda CEP^*$,$P_{H_0}^{(0)}$为$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$之前 H_0 成立的概率(对$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$的验前概率)。如果在$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$之前无任何信息可利用,则按常规,取 $P_{H_0}^{(0)}=0.5$。若在实际操作过程中,对 $P_{H_0}^{(0)}$定为 50% 有争议,则可采用专家平分的方法确定出 $P_{H_0}^{(0)}$的近似值。

运用自助方法,由验前子样为$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$作出经验分布 $F_{n_0}^*(r)$,再从 $F_{n_0}^*(r)$随机抽样,得到再生子样。假定已产生了 N 个再生子样:

$$(r_1^{*(j)},\cdots,r_{n_j}^{*(j)}),j=0,1,\cdots,N-1$$

可对每个子样计算 CEP 的估计,则对于 N 个 CEP 的估计,统计出小于 ζCEP^* 的个数 m,这里,$1<\zeta<\lambda$。于是,m/N 就可作为 P_{H_0} 的近似值。最后,值得指出的是:在上面的讨论中,验前子样$(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$与现场子样必须属于同一总体,但是实际情况往往不是这样。因此,作为验前子样,需要考虑其可信度。记检验的置信度为 $1-\alpha$,当通过检验后,此时,验前子样的可信度就是 $1-\alpha$。令:$P_{H_0}^{*(1)}=P\{H_0\mid(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)}),(r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)})$与现场试验结果相容$\}$,那么,$P_{H_0}^{*(1)}$就是 $P\{H_0\mid r_1^{(0)},\cdots,r_{n_0}^{(0)}\}$,此时,$P_{H_0}^{*(1)}=P_{H_0}^{(0)}\cdot(1-\alpha)$。如果 $\alpha=0$,它表明验前子样与现场子样完全一致,这种情况在工程实际中是很难出现的。

4 简单假设之下的CEP评定

4.1 原理和步骤

为了进行命中精度评定,我们可对如下简单假设作BAYES检验:

$$H_0: CEP = CEP^*$$

$$H_1: CEP = \lambda CEP^*, (\lambda > 1)$$

设现场试验前已经有了验前信息,在获得现场样本后,我们应按如下步骤来进行BAYES检验,以下步骤取 $n=3$ 来说明。

STEP1:用现场样本对验前信息进行相容性检验;在通过相容性检验的条件下,应用此验前信息可计算出 P_{H_0} 和 P_{H_1},且两者的关系为:$P_{H_1}=1-P_{H_0}$。

STEP2:应用随机加权法得到关于现场子弹落点散布中心分布参数的估计,即:$\hat{\mu}_{\Delta H_S}$,$\hat{\mu}_{\Delta L_S}$,$\hat{\sigma}_{\Delta H_S}$,$\hat{\sigma}_{\Delta L_S}$。

STEP3:依据下面提供的方法计算 $P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0)$ 和 $P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP_1} \mid H_1)$

设:已得的现场试验子样$(\Delta H_{S_i}, \Delta L_{S_i})$,$(i=1,\cdots,3)$。

令:

$$r_i = \sqrt{\Delta H_{S_i}^2 + \Delta L_{S_i}^2}, (i = 1,2,3)$$

则它们的计算可按下面的方法进行:

$$P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0) = \frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_{\Delta H_S}\hat{\sigma}_{\Delta L_S}} \iint\limits_{r_i^2 \leqslant CEP^{*2}} \exp\left(-\frac{(\Delta H_S - \hat{\mu}_{\Delta H_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta H_S}^2} - \frac{(\Delta L_S - \hat{\mu}_{\Delta L_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta L_S}^2}\right) \mathrm{d}\Delta H_S \mathrm{d}\Delta L_S$$

$$P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP_1} \mid H_1) = \frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_{\Delta H_S}\hat{\sigma}_{\Delta L_S}} \iint\limits_{r_i^2 \leqslant CEP_1^2} \exp\left(-\frac{(\Delta H_S - \hat{\mu}_{\Delta H_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta H_S}^2} - \frac{(\Delta L_S - \hat{\mu}_{\Delta L_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta L_S}^2}\right) \mathrm{d}\Delta H_S \mathrm{d}\Delta L_S$$

式中,$CEP_1 = \lambda CEP^*$,$(\lambda > 1)$。

STEP4 利用前面第1步和第3步的计算结果,由BAYES公式可获得验后概率 $P(H_0 \mid r_1, r_2, r_3)$,即有:

$$P(H_0 \mid r_1, r_2, r_3) = \frac{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0) P_{H_0}}{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0) P_{H_0} + P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP_1} \mid H_1) P_{H_1}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP1} \mid H_1) P_{H_1}}{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0) P_{H_0}}}$$

STEP5:作出如下结论:

· $\dfrac{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP_1} \mid H_1) P_{H_1}}{P(r_1, r_2, r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0) P_{H_0}} < 1$,则采纳 H_0;否则,拒绝 H_0。

· 此时,检验中犯弃真和采伪的概率 α,β 分别为:

$$\alpha = P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0) \cdot P_{H_0} = (1 - P_1) \cdot P_{H_0}$$

其中:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_{\Delta H_S}\hat{\sigma}_{\Delta L_S}} \iint\limits_{r_i^2 \leqslant CEP_1^2} \exp\left(-\frac{(\Delta H_S - \hat{\mu}_{\Delta H_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta H_S}^2} - \frac{(\Delta L_S - \hat{\mu}_{\Delta L_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta L_S}^2}\right) \mathrm{d}\Delta H_S \mathrm{d}\Delta L_S$$

$$\beta = P(\text{接受 } H_0 \mid H_1) \cdot P_{H_1} = (1 - P_2) \cdot P_{H_1}$$

其中:

$$P_2 = \frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_{\Delta H_S}\hat{\sigma}_{\Delta L_S}} \iint\limits_{r_i^2 \leqslant CEP^{*2}} \exp\left(-\frac{(\Delta H_S - \hat{\mu}_{\Delta H_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta H_S}^2} - \frac{(\Delta L_S - \hat{\mu}_{\Delta L_S})^2}{2\hat{\sigma}_{\Delta L_S}^2}\right) \mathrm{d}\Delta H_S \mathrm{d}\Delta L_S$$

4.2 需要说明的问题

由上面的讨论可以看出，BAYES 方案运用了验前信息，它主要表现在如下决策不等式中：

$$\frac{P(r_1,r_2,r_3 \in C_{CEP_1} \mid H_1)P_{H_1}}{P(r_1,r_2,r_3 \in C_{CEP^*} \mid H_0)P_{H_0}} < 1$$

如果验前信息很充分，能使 P_{H_0} 比较大，那么这时则容易采纳 H_0 如果 $P_{H_0}=P_{H_1}$，那么这时 BAYES 方案实际上已退化为经典的 3.5CEP 画圆方案。显然，在特小现场子样的条件下，这样所作出的精度评定结论，其风险是很大的。

4.3 简化积分运算方法的讨论

从简化积分运算的角度出发，讨论以下问题：假设现场数据$(\Delta H_{S_i},\Delta L_{S_i})$，$(i=1,\cdots,n)$近似等效为圆散布，记为：$\Delta H \sim N(\mu_{\Delta H_S},\sigma^2)$，$\Delta L \sim N(\mu_{\Delta L},\sigma^2)$，$r_i=\sqrt{(\Delta H_{S_i}-\mu_{\Delta H_S})^2+(\Delta L_{S_i}-\mu_{\Delta L_S})^2}$，$(i=1,\cdots,n)$。则有：

$$P(r_i \in C_{CEP^*} \mid H_0)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{r_i^2 \leqslant CEP^{*2}} \exp\left(-\frac{(\Delta H_S+\Delta L_S)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}\Delta H_S \mathrm{d}\Delta L_S$$

作下列变换：$\Delta H=\mu_{\Delta H_S'}+\sigma\rho\cos\theta$，$\Delta L=\mu_{\Delta L_S'}+\sigma\rho\sin\theta$，则可推导出：

$$P(r_i \in C_{CEP^*} \mid H_0)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\int_0^K \rho \mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot 2\pi I_0(A\rho)\mathrm{d}\rho$$

其中：$I_0(A\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-A\rho\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$，$\phi=\mathrm{arctg}^{-1}\frac{\mu_{\Delta L_S'}}{\mu_{\Delta H_S'}}$，它为零阶虚变量 Bessel 函数；$A^2=\frac{1}{\sigma^2}(\mu^2_{\Delta H_S'}+\mu^2_{\Delta L_S'})$；$K=CEP^*/\sigma$。即有：

$$P(r_i \in C_{CEP^*} \mid H_0)=\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\int_0^K \rho \mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot 2\pi I_0(A\rho)\mathrm{d}\rho$$

这样积分运算就可通过查表获得，也可利用 MATLAB 软件中的 Bessel 函数命令 besseli 和数值积分命令 quad8 等来进行编程计算。

4.4 算例

(1) 假设现场数据$(\Delta H_{S_i},\Delta L_{S_i})$，$(i=1,\cdots,n)$中，单个子样中纵、横向数据之间不相关，服从正态分布，且近似等效为圆散布。记为：$\Delta H \sim N(\mu_{\Delta H_S},\sigma^2)$，$\Delta L \sim N(\mu_{\Delta L},\sigma^2)$，其中：$\sigma=1$，$A^2=\frac{1}{\sigma^2}(\mu^2_{\Delta H_S'}+\mu^2_{\Delta L_S'})$，且 A 分别取 9，10，11；CEP^* 取 10；λ 分别取 1.2；计算 $P(r_i\in C_{CEP^*}\mid H_0)$ 和 $P(r_i\in C_{CEP_1}\mid H_1)$。经过编程计算，计算结果如下所示。

A	$P(r_i\in C_{CEP^*}\mid H_0)$	$P(r_i\in C_{CEP_1}\mid H_1)$
9	0.83	0.998
10	0.48	0.975
11	0.15	0.831

(2) P_{H_0} 分别取 0.5，0.6，0.7，0.8，0.9 分别作出结论并计算各种情况下的犯弃真和采伪的概率 α，β。令：$KP=\frac{P(r_i \in C_{CEP_1} \mid H_1)P_{H_1}}{P(r_i \in C_{CEP^*} \mid H_0)P_{H_0}}$

在 $A=9$ 的条件下：

P_{H_0}	KP	结论(是否接收采纳 H_0)	α	β
0.5	1.21	否	0.001	0.086
0.6	0.81	是	0.0012	0.069
0.7	0.52	是	0.0014	0.051
0.8	0.30	是	0.0016	0.034
0.9	0.13	是	0.0018	0.017

在 $A=10$ 的条件下:

P_{H_0}	KP	结论(是否接收采纳 H_0)	α	β
0.5	2.03	否	0.013	0.26
0.6	1.35	否	0.015	0.21
0.7	0.87	是	0.018	0.16
0.8	0.51	是	0.02	0.10
0.9	0.23	是	0.023	0.052

在 $A=11$ 的条件下:

P_{H_0}	KP	结论(是否接收采纳 H_0)	α	β
0.5	5.65	否	0.085	0.427
0.6	3.77	否	0.101	0.341
0.7	2.42	否	0.118	0.256
0.8	1.41	否	0.135	0.171
0.9	0.63	是	0.152	0.085

5 结语

本文从工程应用的角度出发,在极小现场子样条件下,讨论了如何利用验前信息与现场子样来对导弹的命中精度进行评定,将随机加权法与 BAYES 方法结合起来,提出了基于随机加权法的 BAYES 精度评定方法,并通过算例证实了方法的正确性。最后,值得指出的是,本文提供的方法是以验前信息可信,即 通过了现场信息对验前信息的相容性检验为前提的。如果不能通过现场信息对验前信息的相容性检验,那么从原则上说,就不能应用 BAYES 方法进行命中精度评定。至于如何进行现场信息与验前信息之间的相容性检验,我们将另外成文论述。

参考文献:

[1] 张金槐等 . BAYES 方法[M]. 修订版,长沙 :国防科技大学出版社,1992.
[2] 张金槐等 . BAYES 方法与仿真在飞行器试验鉴定中的运用[J]. 系统仿真学报,1996,(8).
[3] 黄柯棣,张金槐等 . 系统仿真技术[M]. 长沙 :国防科技大学出版社,1998.