国防科技大学学报
第 23 卷 第 4 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.23 No.4 2001

文章编号：1001-2486（2001）04-0016-04

Weibull 型产品的可靠性验证*

张士峰

（国防科技大学航天与材料工程学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：讨论了 Weibull 型产品的可靠性验证问题，首先分析了 Weibull 型产品分布参数的无信息验前分布问题，利用验前信息可以得到分布参数的验前概率密度函数，进而分析了产品的可靠性验证问题，顾及了使用方利益和生产方利益。仿真算例表明，使用方利益和生产方利益是相互折衷的。

关键词：Weibull 分布；Bayes 方法；可靠性验证试验；无失效数据

中图分类号：TB114 文献标识码：A

Reliability Demonstration Testing Procedure for Weibull Distribution

ZHANG Shi-feng

（College of Aerospace and Material Engineering，National Univ. of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：The reliability demonstration testing procedure for Weibull distribution is discussed. First，the noninformative prior distribution of the parameters of the life distribution is derived. Then the prior PDF（Probability Density Function）of these parameters are given combining with prior information according to Bayesian theorem. Finally，the reliability demonstration testing procedure is analyzed taking into consideration the consumer's profit and producer's profit. The simulation results show that the consumer's profit and producer's profit can be compromised.

Key words：Weibull distribution；Bayesian analysis；reliability demonstration testing procedure；zero failure lifetime data

随着高新技术的广泛应用和先进工艺的不断发展，产品的可靠性愈来愈高，这就导致在产品的可靠性试验中经常会出现无失效情况。无失效数据问题就是已知产品的寿命分布和一组无失效数据，如何去评价产品的可靠性特征，这属于可靠性评估问题[1,2]。反过来，已知产品的寿命分布，假如要求产品的某个可靠性指标达到某个给定值，那么产品无失效的总试验时间应为多长？这属于可靠性验证问题。可靠性验证试验就是要综合考虑生产方的利益、使用方的利益以及试验费用等诸多因素来制订试验方案，通过这种可靠性验证试验验证产品的可靠性指标是否满足要求，因此可靠性验证问题在可靠性工程中占据着十分重要的位置。

鉴于可靠性验证的重要性，许多学者对这个问题进行了深入的研究，解决的方法主要从两个方向：经典统计方法和 BAYES 方法。胡昌寿等[3]利用经典统计方法给出了成败型产品、指数寿命型产品、Weibull 寿命型产品和应力 - 强度型产品的可靠性验证方案，对于成败型产品和指数寿命型产品，他们给出了一次寿命抽样方案、二次寿命抽样方案和序贯抽样方案；对于 Weibull 寿命型产品，他们假定了形状参数已知；对于应力 - 强度型产品而言，他们没有把应力当作随机变量，而是把应力按最严重情况取值。同时，由于经典统计方法仅仅利用可靠性验证试验时的信息来验证产品的可靠性指标，当可靠性指标要求较高时，往往需要较多的试验次数或试验时间，否则双方所冒的风险势必增大。而 BAYES 方法的特点是充分利用试验之前的各种信息，这种方法为可靠性验证问题提供了一个比较好的解决思路。Martz & Waller[4]利用 Bayes 方法讨论了指数寿命型的可靠性验证问题，在给定可靠性指标的情况下，Bayes 方法能够减少可靠性验证试验所需的时间。何基报和茆诗松[5]利用 Bayes 方法讨论了正态寿命型（对数正态寿命型）的可靠性验证问题。

对于 Weibull 寿命型产品而言，Calabria & Pulcini[6]利用专家经验和工程知识等验前信息得到了形状参数和尺度参数的验前分布，并对产品的可靠性进行了 BAYES 评估。对于 Weibull 寿命型产品的可

* 收稿日期：2001-02-27
作者简介：张士峰（1971-），男，博士生。

靠性验证问题，可以利用文献［6］中所列出的验前信息形式进行分析。但是，如果没有验前信息使用时，可以采用参数的无信息验前分布，同时无信息验前分布的使用也是 Bayes 方法应用中的关键问题，利用参数的无信息验前分布并结合验前数据可以得到参数的验前分布，基于这样的验前分布就可以分析 Weibull 寿命型产品的可靠性验证问题。

1 无信息验前时 Weibull 寿命型产品的可靠性分析

假定产品的寿命 x 服从两参数 Weibull 分布，其可靠性函数为

$$R(x;\alpha,\beta) = \exp\{-(x^\beta/\alpha^\beta)\},\ x > 0 \tag{1}$$

若对 n 个产品进行可靠性寿命试验直到 r 个产品失效为止，即定数截尾情况下，得到产品失效数据为 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r$，则相应的似然函数为

$$L(\alpha,\beta) = \beta^r \alpha^{-r\beta} u^{\beta-1} \exp\{-(t/\alpha)^\beta\} \tag{2}$$

其中

$$u = \prod_{i=1}^{r} x_i,\ t^\beta = \sum_{i=1}^{r} x_i^\beta + (n-r)x_r^\beta$$

当 β 为已知时，t 为 α 的充分统计量，所以 $\alpha^{-\beta}$ 的自然共轭验前分布为 gamma 分布，这样就可以对 α 以及 R 进行统计推断。

当 α 和 β 均未知时，采用经典方法和 BAYES 方法都遇到了困难。对于 BAYES 方法而言，假定 $g(\alpha,\beta)$ 为（α，β）的联合验前分布。当获得了试验样本之后，（α，β）的验后分布为

$$h(\alpha,\beta \mid D) \propto \beta^r \alpha^{-r\beta} u^{\beta-1} \exp\{-(t/\alpha)^\beta\} g(\alpha,\beta) \tag{3}$$

其中 D 表示试验数据。

为了获取（α，β）的无信息验前分布，令

$$\beta = \sigma^{-1},\ \alpha = \exp(\mu),\ x = \exp(w)$$

则有

$$R(w;\mu,\sigma) = \exp[-\exp\{(w-\mu)/\sigma\}],\ -\infty < w < \infty$$

其中 μ 和 σ 分别为位置参数和尺度参数。这样，我们可以运用 Jeffreys 准则得到 μ 和 σ 的联合验前分布为 σ^{-1}，经过变换，（α，β）相应的无信息验前分布为

$$g(\alpha,\beta) \propto (\alpha\beta)^{-1} \tag{4}$$

为了对 Weibull 型产品进行可靠性评估，需要求出可靠性的验后分布，然后才能基于验后分布进行可靠性的统计推断。根据（3）、（4）式，有

$$h(\alpha,\beta \mid D) \propto \beta^{r-1} \alpha^{-r\beta-1} u^{\beta-1} \exp\{-(t/\alpha)^\beta\} \tag{5}$$

可靠性函数为

$$R = \exp\{-(T/\alpha)^\beta\}$$

其中 T 为任务时间。令 $z = (T/\alpha)^\beta$，则 z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) \propto \int_0^\infty \int_0^{Tz^{-1/\beta}} h(\alpha,\beta \mid D)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \propto \int_0^z \int_0^\infty \frac{h(Tz^{-1/\beta},\beta \mid D)}{\beta T^{-1} z^{1+\beta^{-1}}}\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}z$$

则 z 的密度函数为

$$f_z(z) \propto \int_0^\infty \frac{h(Tz^{-1/\beta},\beta \mid D)}{\beta T^{-1} z^{1+\beta^{-1}}}\mathrm{d}\beta$$

由 $R = \exp(-z)$ 可知，R 的概率密度函数为

$$f(R) \propto \int_0^\infty \frac{h(T(-\ln R)^{-1/\beta},\beta \mid D)}{R\beta T^{-1}(-\ln R)^{1+\beta^{-1}}}\mathrm{d}\beta \propto \frac{(-\ln R)^{r-1}}{R}\int_0^\infty \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1} R^{\frac{t^\beta}{T^\beta}}\mathrm{d}\beta$$

$$f(R) = \frac{(-\ln R)^{r-1}/R\int_0^\infty \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1} R^{\frac{t^\beta}{T^\beta}}\mathrm{d}\beta}{\int_0^\infty \Gamma(r)\left(\frac{T^\beta}{t^\beta}\right)^r \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1}\mathrm{d}\beta} \tag{6}$$

同时可以得到 R 的分布函数及 R 的各阶矩分别为

$$F(R) = 1 - \int_0^\infty \left(\frac{T^\beta}{t^\beta}\right)^r \mathrm{gamma}\left(-\ln R, \frac{t^\beta}{T^\beta}, r\right) \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1} \mathrm{d}\beta \Big/ \int_0^\infty \left(\frac{T^\beta}{t^\beta}\right)^r \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1} \mathrm{d}\beta \tag{7}$$

$$\mu_k = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1}}{(t^\beta / T^\beta + k)^r} \mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{T^\beta}{t^\beta}\right)^r \beta^{r-2} T^{-r\beta} u^{\beta-1} \mathrm{d}\beta} \tag{8}$$

利用（6）式和（7）式可以对可靠性 R 进行统计推断，若给定置信水平 γ，则产品可靠性的置信下限 R_L 满足

$$F(R_L) = 1 - \gamma \tag{9}$$

为了说明无信息验前分布（4）式的合理性，有下面算例：

算例 1　某产品寿命服从二参数 Weibull 分布，投试 10 个样品，其寿命为：16，43，52，80，92，98，116，117，140，151，工作时间 $T = 19.1332$。（［7］中的例 3.41）。

取置信水平 $\gamma = 0.9$，可以得到 $R_L = 0.8985$。

这里得到的可靠性置信下限和文献［7］中的各种经典置信下限及 BAYES 置信下限非常接近，同时经过大量的仿真计算表明，采用这种无信息验前分布所得到的置信下限“覆盖”真值的覆盖率和名义置信概率非常接近，即此无信息验前分布具有匹配验前的优良性质[8]，因此可以作为 Weibull 型产品 Bayes 可靠性评估的统计基础。

2　Weibull 寿命型产品可靠性验证的 Bayes 方法

当 Weibull 寿命型产品存在验前数据时，记验前信息为投试 n_1 个产品，r_1 个失效，失效时间为 $x_1^1 \leqslant x_2^1 \leqslant \cdots \leqslant x_{r1}^1$，相应的记号为 D_1，t_1，u_1，此时参数（α，β）的验前密度如（5）式所示，重写为

$$h_1(\alpha, \beta \mid D_1) \propto \beta^{r_1-1} \alpha^{-r_1\beta-1} u_1^{\beta-1} \exp\{-(t_1/\alpha)^\beta\} \tag{10}$$

可靠性验证问题的指标为

$$P\{R_T \geqslant R_0 \mid r = 0\} \geqslant \gamma \tag{11}$$

其中事件“$r = 0$”表示可靠性验证试验中无失效产品出现，γ 为置信水平，R_0 为可靠性验证指标。（11）式的含义是在可靠性验证试验截尾时间 t^* 内没有失效发生时，产品可靠性 R_T 高于 R_0 的概率不小于 γ。对于可靠性验证问题而言，R_0 和 γ 为给定的需要验证的指标，问题就是如何确定无失效试验时间即截尾时间 t^* 来保证（11）式的成立。其实，R_0 为可靠性 R_T 的置信水平为 γ 的置信下限。

假设现场投入 n 个产品进行试验，没有出现失效，此时参数（α，β）的验后密度函数为

$$\pi(\alpha, \beta \mid D) \propto \beta^{r_2-1} \alpha^{-r_1\beta-1} u_1^{\beta-1} \exp\{-(t_1^\beta + t^\beta)/\alpha^\beta\} \tag{12}$$

其中 $t^\beta = nt^{*\beta}$。

与（6）式和（7）式类似，通过分布变换可以得到可靠性 R 的验后密度函数和分布函数分别为

$$\pi(R \mid D) = \frac{\displaystyle(-\ln R)^{r_1-1}/R \int_0^\infty \beta^{r_1-2} T^{-r_1\beta} u_1^{\beta-1} R^{\frac{t_1^\beta + t^\beta}{T^\beta}} \mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^\infty \Gamma(r_1) \left(\frac{T^\beta}{t_1^\beta + t^\beta}\right)^{r_1} \beta^{r_1-2} T^{-r_1\beta} u_1^{\beta-1} \mathrm{d}\beta} \tag{13}$$

$$F(R \mid D) = 1 - \int_0^\infty \left(\frac{T^\beta}{t_1^\beta + t^\beta}\right)^{r_1} \mathrm{gamma}\left(-\ln R, \frac{t_1^\beta + t^\beta}{T^\beta}, r_1\right) \beta^{r_1-2} T^{-r_1\beta} u_1^{\beta-1} \mathrm{d}\beta \Big/ \int_0^\infty \left(\frac{T^\beta}{t_1^\beta + t^\beta}\right)^{r_1} \beta^{r_1-2} T^{-r_1\beta} u_1^{\beta-1} \mathrm{d}\beta \tag{14}$$

根据（14）式有

$$F(R_0 \mid D) \leqslant 1 - \gamma \tag{15}$$

这样可以通过下式来确定无失效试验时间 t^*，

$$\min_{t^*}\{t^* : F(R_0 \mid D, t^*) \leqslant 1-\gamma\} \tag{16}$$

当根据（16）式确定了 t^* 之后，就可以进行可靠性验证试验，若在时间 t^* 内没有失效，则可靠性指标满足（11）式的要求，否则可靠性指标没有得到验证。

上面的验证方案考虑了使用方的利益，但是生产方的利益如何得到保证呢？注意到，可以很容易地得到如下的无条件概率

$$P\{r=0\} = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^\beta}{\alpha^\beta}\right)\beta^{r_1-1}\alpha^{-r_1\beta-1}u_1^{\beta-1}\exp\left(-\frac{t_1^\beta}{\alpha^\beta}\right)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty \beta^{r_1-1}\alpha^{-r_1\beta-1}u_1^{\beta-1}\exp\left(-\frac{t_1^\beta}{\alpha^\beta}\right)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta} = \frac{\int_0^\infty \beta^{r_1-2}u_1^\beta/(t_1^\beta+t^\beta)^{r_1}\mathrm{d}\beta}{\int_0^\infty \beta^{r_1-2}u_1^\beta/t_1^{r_1\beta}\mathrm{d}\beta} \tag{17}$$

概率 $P\{r=0\}$ 表示接受可靠性指标（即满足（11）式）的无条件概率，若此概率过小，也就是说在验证试验时间 t^* 内无失效产品发生的概率很小，即很大程度上总是否定可靠性指标，生产方很难接受这样的方案。其实，这个概率和置信水平 γ 是相互折衷的，通过生产方和使用方的综合考虑来确定 γ。

3 仿真算例

现考虑寿命服从 Weibull 分布的某机电产品的可靠性，若要求可靠性验证指标为 $R_0=0.9$，$\gamma=0.9$，现场投入 5 个样品进行试验，验前数据如算例 1 所示，工作时间为 30。此时根据（14）式、（15）式和（16）式可以得到截尾时间 $t^*=82.8$，同时利用（17）式可以得到 $P(r=0)=0.0652$，生产方很难接受这样低的概率。此时可以适当调整置信水平 γ，比如取 $\gamma=0.85$，可以计算得到截尾时间 $t^*=50.6$，同时有 $P(r=0)=0.3447$；若取 $\gamma=0.8$，可以计算得到截尾时间 $t^*=36$，同时有 $P(r=0)=0.5597$；若取 $\gamma=0.75$，可以计算得到截尾时间 $t^*=23.7$，同时有 $P(r=0)=0.75$。因此通过折衷使用方利益和生产方利益，可以最终确定可靠性验证试验时间为 23.7 小时，如果可靠性验证试验没有出现失效，则接受产品的可靠性性能，否则认为产品可靠性性能不合格，这样的验证试验方案使用方和生产方都易于接受。

由上面的讨论可以看出，置信水平 γ 反映了使用方的利益，无条件概率 $P\{r=0\}$ 反映了生产方的利益。以往的可靠性验证试验方案实际上只考虑了使用方的利益，从统计学的角度来看是进行了显著性检验。为了设计更加合理的可靠性验证试验方案，应首先满足使用方的要求，确定置信水平 γ，然后计算出相应的无条件概率 $P\{r=0\}$，如果没有满足生产方的利益，则需要适当放宽 γ（与使用方协商），直至同时满足双方的要求。

参考文献：

[1] 茆诗松，王玲玲，濮晓龙．威布尔分布场合无失效数据的可靠性分析［J］．应用概率统计，1996，1：95－107．

[2] 王玲玲，王炳兴．无失效数据的统计分析－修正似然函数方法［J］．数理统计与应用概率，1996，1：64－69．

[3] 胡昌寿等．航天可靠性设计手册［M］．北京：机械工业出版社，1999：301－322．

[4] Martz H F，Waller R A．A Bayesian zero-failure（BAZE）reliability demonstration testing procedure［J］．J．Quality Technology，1979，11：128－138．

[5] 何基报，茆诗松．对数正态分布场合无失效的 Bayes 验证试验方案［J］．应用概率统计，2000，3：239－248．

[6] Calabria R，Pulcini G．An engineering approach to Bayes estimation for the Weibull distribution［J］．Microelectron．Reliab．，1994，5：789－802．

[7] 周源泉．质量可靠性增长与评定方法［M］．北京：北京航空航天大学出版社，1997：118－119．

[8] 张士峰．应力－强度模型的 Bayes 可靠性分析［J］．国防科技大学学报，2000，3：84－89．