

文章编号: 1001-2486 (2001) 04-0040-05

随机共振原理在强噪声背景信号检测中的应用*

胡芑庆, 温熙森, 陈敏

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 动态系统中的噪声常被认为是令人讨厌的东西,但在特定的非线性系统中,噪声的存在事实上能够增强微弱信号的检测能力,这种现象就是随机共振(SR, stochastic resonance),它在物理、工业技术和生物医学领域里具有广泛的应用潜力。给出了利用随机共振原理检测微弱周期信号的基本方法,并采用模拟的信号对该方法进行了分析与验证。结果表明,该方法简单、稳健、可靠,能把信噪比较低的周期信号从强背景噪声中可靠地提取出来,将在机械故障诊断领域展示诱人的前景。

关键词: 随机共振; 微弱信号检测; 机械故障诊断

中图分类号: TP277; TH17; TH113 **文献标识码:** A

The Application of Stochastic Resonance Theory for Detecting Weak Signals in Heavy Background Noise

HU Niao-qing, WEN Xi-sen, CHEN Min

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Noise in dynamical systems is usually considered a nuisance. But in certain nonlinear systems, the presence of noise can in fact enhance the detection of weak signal. This phenomenon, called stochastic resonance (SR), may find useful application in physical, technological and biomedical fields. A novel approach to detecting weak periodic signal using stochastic resonance theory is presented. This method is analyzed and validated by simulated signal. The result shows that this method is simple, robust and reliable. The weak sinusoid signal of lower signal-to-noise ratio can be reliably extracted from loud noise. The detection approach of weak signal based on SR indicates a promising prospect for mechanical fault diagnosis.

Key words: stochastic resonance; weak signal detection; mechanical fault diagnosis

噪声干扰是工程中信号处理的一个关键问题之一。在信号处理中,总是想方设法去除背景噪声以保留有用信号,有时对此一筹莫展,因为噪声把有用信号完全淹没了。噪声真的只能起到“反作用”,这似乎不符合哲学中辩证法的基本原理。在特定的非线性系统中,额外大小的噪声事实上可以帮助而不是阻碍信号检测的性能,这就是随机共振现象。这种“反常效应”在微弱信号检测中非常具有潜力。

随机共振最初是由 Benzi 等人提出的^[2,3],他们根据随机共振原理设计了一个地球动力学模型以解释地球气候的变化规律。当时及随后一段时间,并未引起人们广泛的关注,直到在一次双稳环激光器的关键实验中展示了随机共振现象^[5,8],才迎来了随机共振的现代发展时期。

随机共振最初预想用于从噪声背景中进行信号提取这类特定问题。在短数据记录的情况下,从很强的噪声中检测微弱的有用信号,在诸如通讯、雷达、声纳、医学图像、地震、工业测量等应用中都有广泛的需求。常规的一些检测方法对于完全被噪声淹没的微弱信号的检测具有一定的局限性。基于随机共振原理,采用双稳系统进行弱信号检测是一种正在引起关注的崭新技术与方法^[1,5]。

本文将给出利用基于随机共振原理检测微弱信号的基本方法。

* 收稿日期: 2000-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59775025)

作者简介: 胡芑庆(1967-),男,副教授,在职博士生。

1 随机共振概念与基本原理

1.1 一般模型

在一些具有随机共振现象的非线性系统中，通常微弱的输入信息（如微弱信号）能够借助于噪声的作用而被放大和优化。这种效应需要三个基本元素：（1）能量激发垒，或者通常说为阈值形态；（2）弱相干的输入（如周期信号）；（3）系统固有的或追加到相干输入中的噪声源。

在存在噪声和周期激励情况下，考虑双稳势中布朗质点的过阻尼运动：

$$\dot{x}(t) = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t + \varphi) + n(t) \tag{1}$$

其中 $V(x)$ 表示映象对称平方势：

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \tag{2}$$

这样，式（1）可写为：

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^3(t) + A_0 \cos(\Omega t) + n(t) \tag{3}$$

其中 $n(t) = \sqrt{2D}u(t)$, $E[n(t)n(t+\tau)] = 2D\delta(t)\delta(t+\tau)$ 为零均值方差为 1 的白噪声。在探索 SR 的过程中，上式即单变量非线性 Langevin 方程得到了深入研究。在没有调制和噪声作用时，势垒高 $\Delta V = a^2/4b$ ，势低点 $x_m = \pm\sqrt{a/b}$ 处，当 $A_0 > 0$ 时，势低相对于垒高交替地上升和下降。当 $A_0 \geq (4a^3/27b)^{1/2}$ 时，系统将丧失双稳性。因此，在不存在输入激励 ($A_0 = 0, D = 0$) 时，系统状态局限在两势阱的任一个中，且与初始条件有关。

在存在周期激励的情况下，系统的映象对称被打破，均值 $\langle x(t) \rangle$ 不消失。这可以直观地理解为朝一个或另一个势阱的周期混叠的结果。周期激励使得势低点位置以其频率周期地变化。在这种情况下，系统响应具有形式： $x_s(t) = \varepsilon \cos(\Omega t + \phi) + x_h(t)$ ，其中 $x_h(t)$ 表示更高次谐波，与 a, b, A_0 相比 ε, ϕ 较小，在后面的数值分析中几乎观测不到 $x_h(t)$ 。

在不存在周期激励而存在噪声作用的情况下， $x(t)$ 围绕某一局部稳态波动，且其统计方差正比于噪声强度 D 。噪声驱动力的转换以某一速率进行，噪声强度 D 增加，转换率增加。噪声引起的以下的 Kramers 率在局部均衡态间跳跃迫使均值 $\langle x(t) \rangle$ 消失：

$$r_K = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \tag{4}$$

当垒高最小时，阱间转换更为可能。因为正弦信号在其频率处导致势低点位置周期性变化，它有效地锁住了噪声导致的转换。特别地，当噪声本身以每 $2\pi/\Omega$ 秒周期平均产生两次转换时，在 $x(t)$ 中的频率 Ω 处，将观测到一个强正弦分量。这样上面就提供了一种对小驱动频率 Ω 有效的 SR 的简单解释。

将 $n(t) = \sqrt{2D}u(t)$ 代入式（3），并进行标度变换： $x(t) \rightarrow \sqrt{a/b}x(t), t \rightarrow at, c \rightarrow c\sqrt{a^3/b}, \Omega \rightarrow \Omega/a, D \rightarrow D \cdot a^3/b$ ，可以消除势参数 a 和 b ，使方程（2）（3）变为无维数形式：

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) + c \cos(\Omega t) + n(t) \tag{6}$$

势 $V(x)$ 为双稳，最小点在 $\pm x_m$ 处，且 $x_m = 1$ 。两最小点间的势垒高为 $\Delta V = \frac{1}{4}$ 。

1.2 周期性响应

为方便起见，选择周期驱动相位 $\varphi = 0$ ，即输入信号可显式表示为 $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$ ，均值 $\langle x(t) \rangle_{x_0, t_0}$ 是通过遍历噪声实现集合，对初始条件为 $x_0 = x(t_0)$ 的不同类的过程 $x(t)$ 进行平均而获得的。渐近地 ($t_0 \rightarrow -\infty$)，初始条件失去记忆， $\langle x(t) \rangle_{x_0, t_0}$ 变为时间的周期函数，即 $\langle x(t) \rangle_{as} = \langle x(t + T_\Omega) \rangle_{as}$ ，其中 $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ 。对于微小幅值，系统对周期输入信号的响应可写为

$$\langle x(t) \rangle_{as} = \bar{x} \cos(\Omega t - \bar{\phi}) \tag{7}$$

其中幅值为 \bar{x} , 相位滞后为 $\bar{\phi}$ 。幅值和相位偏移的估计表达式为

$$\bar{x}(D) = \frac{A_0 \langle x^2 \rangle_0}{D} \frac{2r_k}{\sqrt{4r_k^2 + \Omega^2}} \quad (8a)$$

$$\bar{\phi}(D) = \arctan\left(\frac{\Omega}{2r_k}\right) \quad (8b)$$

其中 $\langle x^2 \rangle_0$ 是静态未摄动系统 ($A_0 = 0$) 的由 D 决定的方差。式 (8) 表明对于离散和连续一维系统的一阶调制幅值 $A_0 x_m / D$ 成立^[5 6 8]。

2 基于 SR 原理的微弱周期信号检测模型与数据分析

2.1 检测模型与求解方法

对式 (1) (2) 进行改写, 可得到信号检测模型:

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) + A_0 \cos \Omega t + n(t) \quad (9a)$$

$$y(t) = \text{sgn}(x(t)), \quad \text{or} \quad y(t) = x(t) \quad (9b)$$

其它参数同前所述, 对式 (9) 采用 4 阶 Runge-Kutta 法求解。这里的“微弱”意味着信噪比很低, 使得这种周期调制如此小以至不足以激励质点越过势垒在两阱处跳跃转换。

2.2 模型 (9) 检测微弱信号的数值仿真与分析

模型 (9) 中 $n(t)$ 满足 $n(t)n(t') = 2D\delta(t-t')$, 其中 D 为噪声强度因子。假设实际中通过测量获得的信号为 $s(t) = A_0 \cos(\Omega t) + n(t)$, 信号检测的目的首先是从 $s(t)$ 中分析出是否存在频率为 Ω 特征信号分量 $A_0 \cos(\Omega t)$; 再者就是设法估计幅值分量 A_0 和频率 Ω (或确定 $f: \Omega = 2\pi f$)。

假想实际中通过传感器测量获得的输出为 $s(t) = A_0 \cos(\Omega T) + \sqrt{2D}u(t)$, 白噪声信号为 $n(t) = \sqrt{2D}u(t)$, 其中 $u(t)$ 为均值为零, 方差为 1 的白噪声。设 $A_0 = 0.6$, $\Omega = 2\pi \times 15$ (rad/s), $D = 60$, 选择采样频率 $f_s = 100$ Hz, 数据点数 $N = 10000$, $n(t)$ 与 $s(t)$ 的时域和功率谱结果如图 1 所示。图 1(a) 为纯白噪声 $n(t)$, 图 1(b) 为 $s(t)$, 图 1(c) 图 1(d) 分别为图 1(a) 图 1(b) 中数据的功率谱图。比较图 1(a) 与图 1(b) 图 1(c) 与图 1(d), 看不出其中的区别。当 $D \geq 20$ 时, $n(t)$ 和 $s(t)$ 在时、频域上基本上不能分辨。

但是, 如果我们把图 1(a) 图 1(b) 中数据 $n(t)$ $s(t)$ 作为模型 (9) 中右边后两项即作为该模型的输入, 参数选择同前所述。通过计算后获得的输出的数据及局部功率谱分别如图 2(a) (b) (c) (d) 所示。图 2(b) 为图 2(a) 的局部功率谱, 图 2(d) 为图 2(c) 的局部功率谱。从图 2(d) 可明显看出, $f = 15$ Hz 的频率分量可谓“一枝独秀”、“鹤立鸡群”, 从而可作出判断: 图 1(b) 显示的数据中包含有 $f = 15$ Hz 的频率分量的信号 (而图 1(a) 则不然)。此时的信噪比 $\text{SNR} = 20 \log(A_0 / \sqrt{2D}) = 20 \log(0.6 / \sqrt{2 \times 60}) = -25.2288$ (dB), 如此低的信噪比仍能通过模型 (9) 进行微弱信号的有效检测, 且思路与操作简单、稳健, 实在令人“难以置信”。而在如图 2 所示的对数据进行直接频谱分析无论如何也不可能从如此强的噪声中分辨出微弱周期信号。不仅如此, 当 $D = 150$ 时 $f = 15$ Hz 的频率分量仍然清晰可辨 (图 3), 此时, 信噪比 $\text{SNR} = 20 \log(A_0 / \sqrt{2D}) = 20 \log(0.6 / \sqrt{2 \times 150}) = -29.2082$ (dB)。

根据图 2 和图 3 的结果, 当将信号 $s(t)$ 作用于模型 (9) 后, 在模型的输出中, 要检测的频率为 Ω 的信号得到了显著加强, 从而判断出 $s(t)$ 中含有频率为 Ω 的信号, 频率就是 Ω (或 $f: \Omega = 2\pi f$)。

通过类似图 2 或图 3 的功率谱图, 容易估计出模型 (9) 输出中的频率为 Ω 的信号成分的幅值大小, 设为 $A(\Omega, D)$ 则由式 (8a), 可估计出原信号 $s(t)$ 中频率为 Ω 的信号分量的幅值估计值 \bar{A}_0 为

$$\bar{A}_0 = \frac{A(\Omega, D) \cdot D \cdot \sqrt{4r_k^2 + \Omega^2}}{2r_k^2 \cdot x_m^2} \quad (10)$$

表 1 为一组估计结果实例 (A_0 变化, $D = 60$ 固定, 其它参数同前), 由表结果可知, 当 $A_0 = 0.5$ 时, 最优噪声强度值 $D = 60$, 此时, 检测结果误差最小。

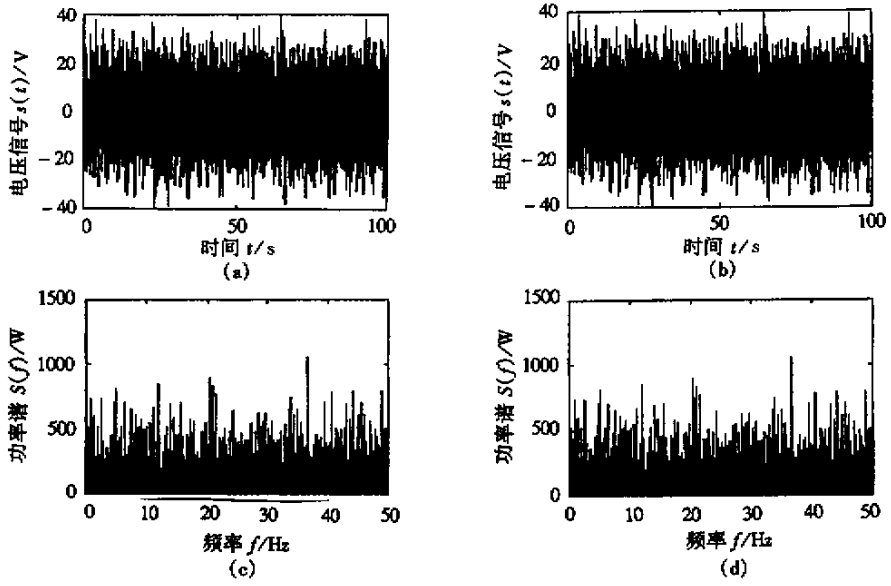


图 1 噪声与周期信号加噪声的时域波形与功率谱比较

Fig.1 Waveform and power spectrum of noise and periodic signal plus noise

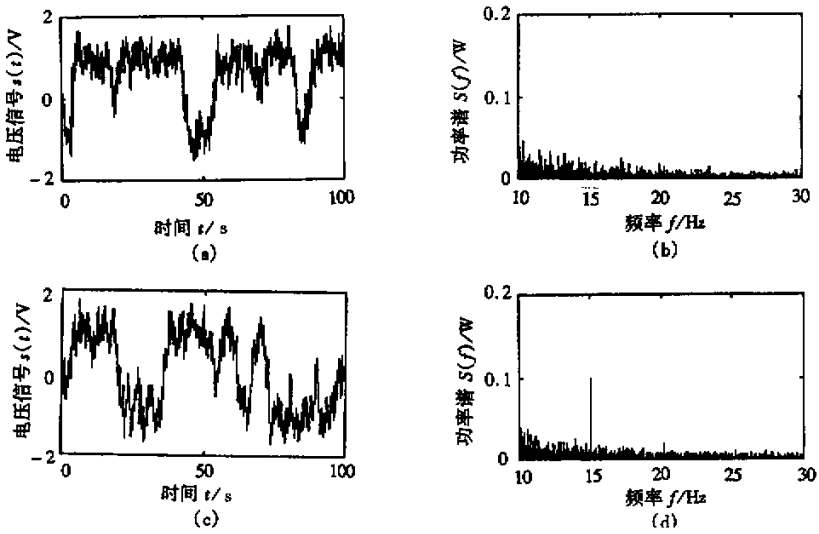


图 2 模型 (9) 对信号 $n(t)$ 、 $s(t)$ 的作用结果

Fig.2 The output of model(9) for signals $n(t)$ and $s(t)$

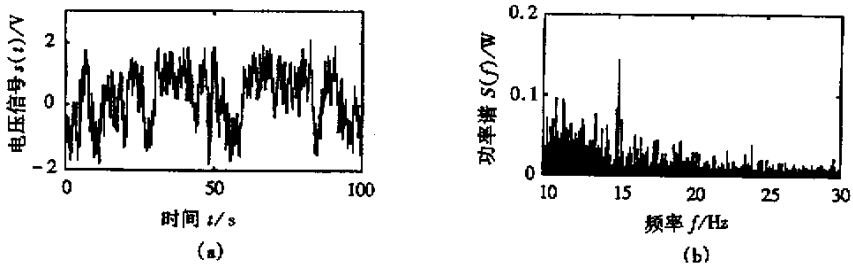


图3 $D = 150$ 时, 模型(9)对信号 $s(t)$ 的作用结果

Fig.3 The output of model(9) for signal $s(t)$ when $D = 150$

表1 频率为 $\Omega = 2\pi \times 15$ (rad/s) 的弱信号幅值估计结果

Tab.1 Approximation of amplitude of weak signal where the frequency is $\Omega = 2\pi \times 15$ (rad/s)

A_0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$A(\Omega, D)(\times 10^{-5})$	1.154	1.088	2.542	3.369	4.200	4.382	4.911	5.927	6.536
\bar{A}_0	0.146	0.137	0.321	0.425	0.530	0.553	0.619	0.748	0.825
$\frac{ A_0 - \bar{A}_0 }{A_0} \times 100\%$	45.52%	31.35%	6.89%	6.24%	5.95%	7.88%	11.51%	6.51%	8.39%
SNR (dB)	-40.8	-34.8	-31.3	-28.8	-26.8	-25.2	-23.9	-22.7	-21.71

3 结论

本文从基本概念和原理出发, 较详细地分析了随机共振原理从强噪声背景中检测微弱周期信号的基本方法。模拟数据分析结果表明这种方法简单而有效, 是一种具有实际应用价值的富有前途的微弱信号检测新方法, 将在机械故障诊断领域展示诱人的前景。进一步的研究工作将回答随机共振对淹没在强噪声中的多个微弱信号检测的有效性, 并将这种崭新方法用于转子系统碰摩故障的早期检测中。

参考文献:

- [1] Asdi A S, Tewfik A H. Detection of Weak Signals Using Adaptive Stochastic Resonance [A]. in Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-95), May 1995, 2: 1332-1335.
- [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A. A Theory of Stochastic Resonance in Climatic Change [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, June 1983, 43(3): 565-578.
- [3] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1981, 14: 453-457.
- [4] Debnath G, Zhou T, Moss F. Remarks on Stochastic Resonance [J]. Physical Review A, April 1989, 39(8): 4323-4326.
- [5] Gammaitoni L, et. al. Stochastic Resonance [J]. Reviews of Modern Physics, January 1998, 70(1): 223-287.
- [6] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S. Stochastic Resonance in Bistable Systems [J]. Physical Review Letters, January 1989, 62(4): 349-352.
- [7] Jung P, Hanggi P. Amplification of Small Signals via Stochastic Resonance [J]. Physical Review A, December 1991, 44(12): 8032-8042.
- [8] McNamara B, Wiesenfeld K, R. Roy. Observation of Stochastic Resonance in a Ring Laser [J]. Physical Review Letters, June 1988, 60(25): 2626-2629.

