

文章编号: 1001-2486 (2001) 04-0045-06

## 多轴数控机床的通用运动学综合空间误差模型\*

粟时平, 李圣怡, 王贵林

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 提出了一种适用任意结构多轴数控机床的新通用运动学综合空间误差模型。该模型包含了由于制造、安装、运动控制不精确和刀具、床身、工件热变形以及其它因素引起的初始位置误差与运动误差, 反应了机床误差的实际变化规律, 对机床工作区误差适时全补偿特别有效。为了发展该新型误差模型, 运用了多体系统运动学理论和齐次变换矩阵。最后, 利用所述建模理论和方法, 给出了 3 轴立式数控机床的空间误差模型表达式, 并分析了其 36 种误差成分的变化规律。

**关键词:** 数控机床; 综合空间误差模型; 几何误差; 热变形误差; 运动学

**中图分类号:** TH161 **文献标识码:** A

## A Universal Synthetic Volumetric Error Model of Multi-axis NC Machine Tool Based on Kinematics

SU Shi-ping, LI Sheng-yi, WANG Gui-lin

(College of mechatronics and automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A novel methodology has been presented to build a synthetic volumetric error model of a multi-axis NC machine tool of arbitrary configuration. The model includes original position errors and motion errors that account for geometric errors owing to manufacture, installation and motion control inaccuracy, thermal errors from thermal deformation of tool, machine and workpiece and mechanical loading errors etc. Thus it describes the error's facts of a machine tool and is useful to real-time compensation of the overall errors within the machine's working volume specially. In order to develop the new model, multi-axis kinematics and homogeneous transform matrices are utilized. Finally, based on the proposed modeling theory and method, the error model of a 3-axis NC vertical machine tool is introduced. In addition, its 36 error components are analyzed.

**Key words:** NC machine tool; synthetic volumetric error model; geometric error; thermal error; kinematics

多轴数控机床可以用来完成各种复杂几何形状的高精度加工, 应用非常普遍。但由于其结构及运动的复杂性, 各单元的误差对机床的综合空间误差的影响规律很复杂, 增加了加工误差的不确定性, 增大了误差分析、测量和补偿的难度。因此数控机床误差一直是受到国内外专家关注但又尚未很好解决的难题。而解决这一难题的重要前提条件是建立起准确、真实、好用的数控机床误差模型。

目前, 国内外许多学者在机床误差建模领域开展了多方面的研究, 提出了不少建模方法。如几何法、误差矩阵法、二次关系法、机构学法、刚体运动学法等<sup>[1-2]</sup>。这些研究为进行机床精度分析和误差检测、补偿提供了一定的基础, 但是由于存在适用范围小、没有通用性以及易产生人为推导误差等问题, 未能从根本上解决机床误差建模的通用性问题。

随着加工精度要求的提高, 热变形、载荷与切削力等误差成为机床空间误差的主要误差源, 传统的静态误差补偿已难以满足实际需要, 误差的实时补偿显得更加必要和有效<sup>[3-4]</sup>, 因此建立起与之相适应的误差模型显得尤为重要。本文在国内外机床误差建模研究的基础上, 运用多体系统运动学理论和齐次矩阵变换, 根据多轴数控机床几何及热变形等误差的特性, 提出了轴数控机床通用的运动学综合空间误差数学模型, 其具有规范化、约束条件少、易于解决复杂系统运动问题的特点, 为机床误差实时补偿提供了一个好的误差模型。

\* 收稿日期: 2001-03-05

基金项目: 国家部委基金项目资助 (2000J18.2.2KG0130)

作者简介: 粟时平 (1963-), 男, 副教授, 博士生。

### 1 多体系结构的齐次坐标变换

通用误差模型的建立，不是针对某一台或某一类机床，而是针对一种抽象的机床模型，基于多体系运动学理论<sup>[5,6]</sup>，采用低序阵列描述抽象机床系统的拓扑结构<sup>[5]</sup>，矢量及其列向量表达位置关系<sup>[5]</sup>，齐次变换矩阵计算多体系内体间的相互关系<sup>[5,6]</sup>。

如图 1 所示，典型体  $j$  及其低序体  $i$  两坐标系的相互关系可以表述为：当误差为零时，两坐标系原点的相对位置由初始位置矢量  $a_{ij}$  和运动矢量  $S_{ij}$  决定，当误差不为零时，两坐标系原点的相对位置另加由初始位置误差矢量  $\Delta a_{ij}$  和运动误差矢量  $\Delta S_{ij}$  决定<sup>[5]</sup>；两坐标系同名轴间的相对位置在无误差时由初始方位和回转运动角来确定，在有误差时另加由初始方位和运动角误差来确定。

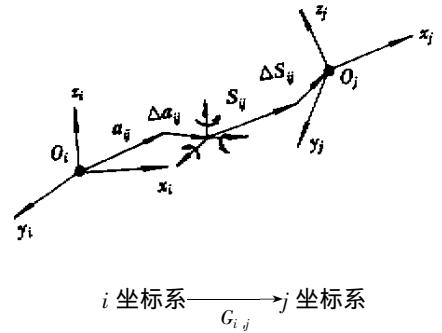


图 1 坐标系之间的变换

Fig.1 Transformations between reference frames

#### 1.1 理想条件的坐标变换

设矢量  $a_{ij} = [a_{ij} \ b_{ij} \ c_{ij} \ 0]^T$ ，矢量  $S_{ij} = [x_{ij}(t) \ y_{ij}(t) \ z_{ij}(t) \ 0]^T$ ，两坐标系同名轴之间的方位角为零、回转运动角分别为  $\alpha_{ij}(t)$ 、 $\beta_{ij}(t)$  和  $\gamma_{ij}(t)$ ，无误差时，坐标系  $i$  至坐标系  $j$  的齐次坐标变换矩阵为：

$$HT_i^j = \begin{bmatrix} c\beta_{ij}(t)c\gamma_{ij}(t) & -c\beta_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) & s\beta_{ij}(t) & a_{ij} + x_{ij}(t) \\ c\beta_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) + s\alpha_{ij}(t)s\beta_{ij}(t)c\gamma_{ij}(t) & c\alpha_{ij}(t)c\gamma_{ij}(t) - s\alpha_{ij}(t)s\beta_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) & -s\alpha_{ij}(t)c\beta_{ij}(t) & b_{ij} + y_{ij}(t) \\ s\beta_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) - c\alpha_{ij}(t)s\beta_{ij}(t)c\gamma_{ij}(t) & s\alpha_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) + c\alpha_{ij}(t)s\beta_{ij}(t)s\gamma_{ij}(t) & c\alpha_{ij}(t)c\beta_{ij}(t) & c_{ij} + z_{ij}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式 (1) 中， $s = \sin$ ， $c = \cos$ ，“ $\alpha$ ”、“ $\beta$ ”、“ $\gamma$ ”表示角度，下同。

#### 1.2 误差引起的坐标变换

任意两相邻体之间存在 6 个自由度，因此会产生 6 个自由度方向的误差，设其为  $\Delta x_{ij}$ 、 $\Delta y_{ij}$ 、 $\Delta z_{ij}$ 、 $\Delta \alpha_{ij}$ 、 $\Delta \beta_{ij}$  和  $\Delta \gamma_{ij}$ 。则误差引起的坐标系  $i$  至  $j$  的齐次坐标变换矩阵为：

$$\Delta T_i^j = \begin{bmatrix} c\Delta\beta_{ij}c\Delta\gamma_{ij} & -c\Delta\beta_{ij}s\Delta\gamma_{ij} & s\Delta\beta_{ij} & \Delta x_{ij} \\ c\Delta\beta_{ij}s\Delta\gamma_{ij} + s\Delta\alpha_{ij}s\Delta\beta_{ij}c\Delta\gamma_{ij} & c\Delta\alpha_{ij}c\Delta\gamma_{ij} - s\Delta\alpha_{ij}s\Delta\beta_{ij}s\Delta\gamma_{ij} & -s\Delta\alpha_{ij}c\Delta\beta_{ij} & \Delta y_{ij} \\ s\Delta\beta_{ij}s\Delta\gamma_{ij} - c\Delta\alpha_{ij}s\Delta\beta_{ij}c\Delta\gamma_{ij} & s\Delta\alpha_{ij}c\Delta\gamma_{ij} + c\Delta\alpha_{ij}s\Delta\beta_{ij}s\Delta\gamma_{ij} & c\Delta\alpha_{ij}c\Delta\beta_{ij} & \Delta z_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式 (2) 中，“ $\Delta$ ”表示误差，下同。

如果角误差  $\Delta \alpha_{ij}$ 、 $\Delta \beta_{ij}$ 、 $\Delta \gamma_{ij}$  很小，可以取  $c\Delta \alpha_{ij} = 1$ ， $s\Delta \alpha_{ij} = \Delta \alpha_{ij}$ ， $c\Delta \beta_{ij} = 1$ ， $s\Delta \beta_{ij} = \Delta \beta_{ij}$ ， $c\Delta \gamma_{ij} = 1$ ， $s\Delta \gamma_{ij} = \Delta \gamma_{ij}$ ，并忽略二次误差（下同）。则 (2) 式可以化简为：

$$\Delta T_i^j = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_{ij} & \Delta\beta_{ij} & \Delta x_{ij} \\ \Delta\gamma_{ij} & 1 & -\Delta\alpha_{ij} & \Delta y_{ij} \\ -\Delta\beta_{ij} & \Delta\alpha_{ij} & 1 & \Delta z_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

① 坐标系在定位（或固定联接）条件下，两坐标系的轴向误差矢量为  $\Delta a_{ij} = [\Delta a_{ij}(t) \ \Delta b_{ij}(t) \ \Delta c_{ij}(t) \ 0]^T$ ，同名轴间的角误差分别为  $\Delta \alpha_{ij}(t)$ 、 $\Delta \beta_{ij}(t)$  和  $\Delta \gamma_{ij}(t)$ ，相应的齐次坐标变换矩阵  $\Delta FT_i^j$  为：

$$\Delta FT_i^j = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_{ij}(t) & \Delta\beta_{ij}(t) & \Delta a_{ij}(t) \\ \Delta\gamma_{ij}(t) & 1 & -\Delta\alpha_{ij}(t) & \Delta b_{ij}(t) \\ -\Delta\beta_{ij}(t) & \Delta\alpha_{ij}(t) & 1 & \Delta c_{ij}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

② 坐标系作相对平移运动时， $\Delta S_{ij} = [\Delta x_{ij}(t) \ \Delta y_{ij}(t) \ \Delta z_{ij}(t) \ 0]^T$ ，两坐标系的轴向误差矢量为  $\Delta S_{ij} = [\Delta x_{ij}(t) \ \Delta y_{ij}(t) \ \Delta z_{ij}(t) \ 0]^T$ ，同名轴间角误差分别为  $\Delta\alpha_{ij}(L_{ij}, t)$ 、 $\Delta\beta_{ij}(L_{ij}, t)$  和  $\Delta\gamma_{ij}(L_{ij}, t)$  相应的齐次坐标变换矩阵  $\Delta MT_i^j$  为：

$$\Delta MT_i^j = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_{ij}(L_{ij}, t) & \Delta\beta_{ij}(L_{ij}, t) & \Delta x_{ij}(L_{ij}, t) \\ \Delta\gamma_{ij}(L_{ij}, t) & 1 & -\Delta\alpha_{ij}(L_{ij}, t) & \Delta y_{ij}(L_{ij}, t) \\ -\Delta\beta_{ij}(L_{ij}, t) & \Delta\alpha_{ij}(L_{ij}, t) & 1 & \Delta z_{ij}(L_{ij}, t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

③ 坐标系作相对回转运动时，设坐标系  $j$  绕坐标系  $i$  中某一直线的回转角为  $\theta_{ij}(t)$  (简称为  $\theta_{ij}$ )，设  $\Delta x_{ij} = \Delta x_{ij}(\theta_{ij}, t)$ 、 $\Delta y_{ij} = \Delta y_{ij}(\theta_{ij}, t)$ 、 $\Delta z_{ij} = \Delta z_{ij}(\theta_{ij}, t)$ 、 $\Delta\alpha_{ij} = \Delta\alpha_{ij}(\theta_{ij}, t) + \theta_{xij}$ 、 $\Delta\beta_{ij} = \Delta\beta_{ij}(\theta_{ij}, t) + \theta_{yij}$ 、 $\Delta\gamma_{ij} = \Delta\gamma_{ij}(\theta_{ij}, t) + \theta_{zij}$ ，将其代入式(2)即得相应的坐标变换矩阵  $\Delta RT_i^j$ 。

### 1.3 总坐标变换矩阵

综上所述，坐标系  $i$  至坐标系  $j$  的总齐次坐标变换矩阵为：

$$T_i^j = HT_i^j \Delta FT_i^j \Delta MT_i^j \Delta RT_i^j \quad (6)$$

若高序体  $j$  有大于低序体  $i$  的其它低序体，则低序体  $i$  的坐标系至高序体  $j$  的坐标系之间的总齐次坐标变换矩阵为：

$$T_i^j = \prod_{k=i}^j T_k^{k+1} \quad (7)$$

式(7)中  $k$  为  $j$  的不小于  $i$  的低序体号。

## 2 综合空间误差建模

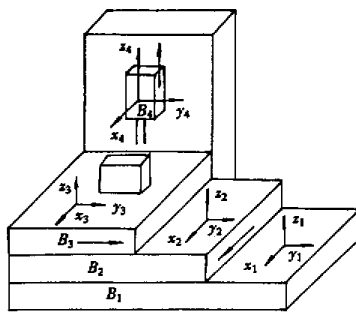
设刀具尖在工件坐标系  $n$  中的齐次坐标为  $P_n$ ，在刀具坐标系  $m$  中的齐次坐标为  $D_m$ ，参考坐标系  $j$  至坐标系  $n$  的齐次坐标变换矩阵为  $T_j^n$ ，参考坐标系  $j$  至坐标系  $m$  的齐次坐标变换矩阵为  $T_j^m$ 。那么，加工点的综合空间误差为：

$$E(t) = T_j^n P_n - T_j^m D_m \quad (8)$$

式(8)即为数控机床的通用运动学综合空间误差模型的数学表达式。

## 3 建模举例及误差分析

现以三轴立式数控机床为例进行建模，其结构如图2所示，运动部件有3个，分别沿3个互相垂



$B_1$  - 床身,  $B_2$  - 溜板,  $B_3$  - 工作台,  $B_4$  - 主轴箱

图2 三轴数控机床结构示意图

Fig.2 Frame sketch of 3-axis machine tool

直的坐标轴作直线平移运动。4个坐标系分别设置在  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  和  $B_4$  上，其低序阵列表如表 1 所示。

表 1 三轴立式数控机床的低序阵列表

Tab.1 The lowness sequence array for reference frame of 3-axis machine tool

高序体	体号			
	1	2	3	4
↓	1	2	3	4
	0	1	2	1
低序体	0	0	1	0
	0	0	0	0

### 3.1 变换矩阵

坐标系之间的总齐次坐标变换矩阵（忽略二次及以上误差项，省略运动误差下标）如下：

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma(y, t) - \Delta\gamma_{12}(t) & \Delta\beta(y, t) + \Delta\beta_{12}(t) & \Delta a_{12} + \Delta x(y, t) + \Delta x_{12}(t) \\ \Delta\gamma(y, t) + \Delta\gamma_{12}(t) & 1 & -\Delta\alpha(y, t) - \Delta\alpha_{12}(t) & y + \Delta b_{12} + \Delta y(y, t) + \Delta y_{12}(t) \\ -\Delta\beta(y, t) - \Delta\beta_{12}(t) & \Delta\alpha(y, t) + \Delta\alpha_{12}(t) & 1 & \Delta c_{12} + \Delta x(y, t) + \Delta z_{12}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma(x, t) - \Delta\gamma_{23}(t) & \Delta\beta(x, t) + \Delta\beta_{23}(t) & a_{23} + \Delta x(x, t) + \Delta x_{23}(t) \\ \Delta\gamma(x, t) + \Delta\gamma_{23}(t) & 1 & -\Delta\alpha(x, t) - \Delta\alpha_{23}(t) & b_{23} + \Delta y(x, t) + \Delta y_{23}(t) \\ -\Delta\beta(x, t) - \Delta\beta_{23}(t) & \Delta\alpha(x, t) + \Delta\alpha_{23}(t) & 1 & z + c_{23} + \Delta x(x, t) + \Delta z_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma(z, t) - \Delta\gamma_{14}(t) & \Delta\beta(z, t) + \Delta\beta_{14}(t) & a_{14} + \Delta x(z, t) + \Delta x_{14}(t) \\ \Delta\gamma(z, t) + \Delta\gamma_{14}(t) & 1 & -\Delta\alpha(z, t) - \Delta\alpha_{14}(t) & b_{14} + \Delta y(z, t) + \Delta y_{14}(t) \\ -\Delta\beta(z, t) - \Delta\beta_{14}(t) & \Delta\alpha(z, t) + \Delta\alpha_{14}(t) & 1 & z + c_{14} + \Delta x(z, t) + \Delta z_{14}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 3.2 误差模型

设刀具尖在工件坐标系 3 中的齐次坐标为  $P_3 = [P_x \ P_y \ P_z \ 1]^T$ ，在刀具坐标系 4 中的齐次坐标为  $D_4 = [D_x \ D_y \ D_z \ 1]^T$ ，则：

$$E(t) = T_1^3 P_3 - T_1^4 D_4 = T_1^2 T_2^3 P_3 - T_1^4 D_4 \quad (12)$$

式 (12) 即为三轴立式数控机床的综合空间误差模型。

当机床作垂直直线加工时，设坐标系初始位置完全重合， $P_3 = [s \ w \ h + z \ 1]^T$ 、 $D_4 = [s \ w \ h \ l]^T$ ，忽略控制误差和位置误差，则有：

$$\begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ E_z(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w\Delta\gamma(z, t) - h\Delta\beta(z, t) - \Delta x(z, t) \\ h\Delta\alpha(z, t) - s\Delta\gamma_{14}(z, t) - \Delta y(z, t) \\ s\Delta\beta(z, t) - w\Delta\alpha(z, t) - \Delta z(z, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

当  $s$ 、 $w$ 、 $h$  为零时有：

$$\begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ E_z(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta x(z, t) \\ -\Delta y(z, t) \\ -\Delta z(z, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

此时，垂直直线加工的综合空间误差只与沿  $z$  轴平移引起的轴向误差有关。 $z$  轴平移过程产生的各项误差以及  $s$ 、 $w$ 、 $h$  为零时的总空间误差的变化规律如图 3 所示。

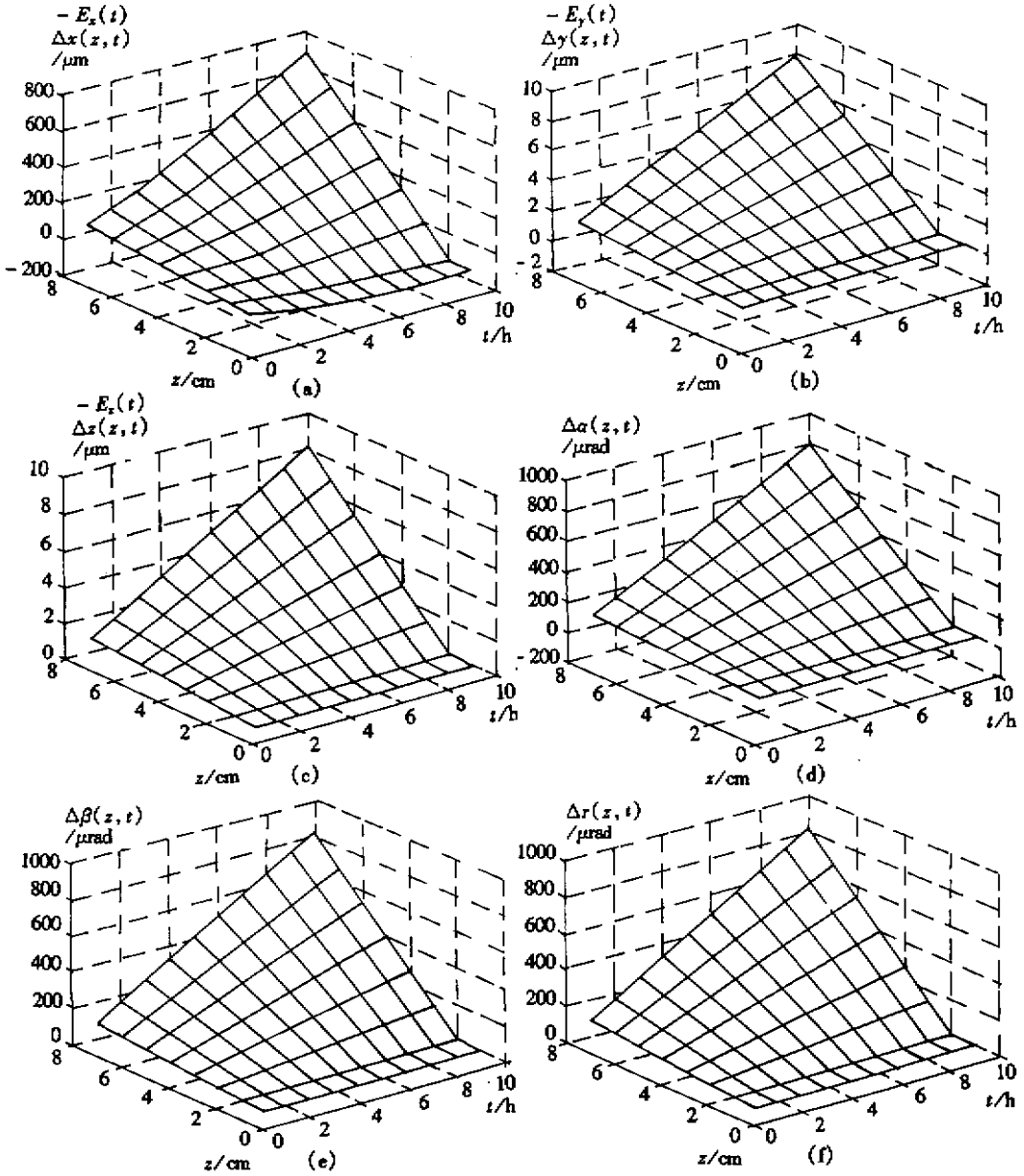


图 3  $z$  轴平移的运动误差

Fig.3 Motion errors of smooth move in  $z$  axis

### 3.3 误差辨识和分析

从式 (9) ~ (11) 可知：三轴机床有 18 项初始位置误差和 18 项平移运动误差，共 36 项。采用双频激光干涉仪和热耦传感器可以测得机床不同状态和时刻的各项误差，图 3 给出了坐标系 4 沿坐标系 1 的  $z$  轴平移时的 6 项运动误差仿真结果（坐标系 2 沿坐标系 1 的  $x$  轴及坐标系 3 沿坐标系 2 的  $y$  轴平移时的运动误差规律与之相同），图 4 给出了坐标系 1、2 之间的初始位置误差仿真结果，图 5 给出了坐标系 2、3 之间的初始位置误差  $\Delta\gamma_{23}(t)$  及坐标系 1、4 之间的的初始位置误差  $\Delta\alpha_{14}(t)$  及  $\Delta\beta_{14}(t)$  仿真结果（其它误差的变化规律和范围与坐标系 1、2 之间的相应误差项基本相同）。

从图中可以看出，初始位置误差只与时间有关，而运动误差既与时间有关，又与运动量有关，并

且位置误差中,除  $\Delta\gamma_{23}(t)$ 、 $\Delta\alpha_{14}(t)$  及  $\Delta\beta_{14}(t)$  外,其它 15 项误差的变化范围比运动误差变化

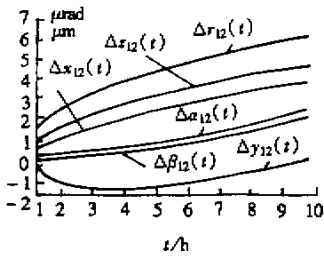


图4 坐标系 1、2 之间的位置误差

Fig.4 Position errors between reference frame 1 and 2

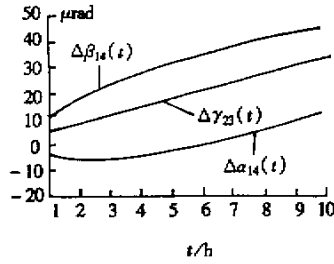


图5 位置误差  $\Delta\gamma_{23}(t)$ 、 $\Delta\alpha_{14}(t)$  及  $\Delta\beta_{14}(t)$

Fig.5 Position error  $\Delta\gamma_{23}(t)$ ,  $\Delta\alpha_{14}(t)$  and  $\Delta\beta_{14}(t)$

范围小 2~3 个数量级。由此可知:在三轴机床中,3 个平移运动产生的 18 项运动误差,以及 3 个坐标轴初始位置产生的 3 项垂直度误差共 21 项误差是主要误差,而其它 15 项位置误差为次要误差,因此可以忽略。根据各项实时测量误差,即可进行误差实时补偿。如果运用人工神经网络等方法预先确定各项误差与工作时间、运动量之间的精确关系,则可在在此基础上进行预补偿。文献 [6] 在这方面已经作了深入的研究,得出了各项误差的变化规律,在误差的实时补偿和预补偿方面取得了成功。本文限于篇幅,不再赘述。

#### 4 小结

利用多体系统运动学理论,建立起了多轴机床综合空间误差的通用数学模型。该模型包括了机床几何、热变形、加工载荷及切削力等主要误差源,描述了机床误差的实际变化规律,且具有很高的计算精度,适用于各种机床结构形式以及各种工作状态,为多轴数控机床进行实时测量和补偿提供了一种较好的误差分析和计算模型。

#### 参考文献:

- [1] Rahman M, Heikkala J, Lappalainen K. Modeling, measurement and error compensation of multi-axis machine tools. Part I: theory [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2000, 40: 1535-1546.
- [2] Eman K F, Wu B T. A generalized geometric error Model for Multi-Axis Machines [J]. Annals of CIRP, 1987 (VOL. 36), 1: 253-256.
- [3] Lo C H, Yuang J X, Ni J. An application of real-time error compensation on a turning center [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1995 (12): 1669-1682.
- [4] Lee H S, Kim S W. Real-time correction of movement errors of a machine axis by multiple null-balancing using TWYMAN-GREEN interferometry [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1995 (3): 477-486.
- [5] 刘又午, 刘丽冰, 赵小松, 章青, 王树新. 数控机床误差补偿技术研究 [J]. 中国机械工程, 1998, 12: 48-52.
- [6] Srivastava A K, Veldhuis S C, Elbestawit M A. Modeling geometric and thermal errors in a five-axis CNC machine tool [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1995 (9): 1321-1337.



