国防科技大学学报
第 23 卷 第 4 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.23 No.4 2001

文章编号:1001-2486(2001)04-0093-05

用线性规划法设计复系数 FIR 滤波器*

陆必应,宋千,梁甸农,周智敏

(国防科技大学电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:讨论了在复 Chebyshev 逼近意义下设计复系数 FIR 滤波器问题。直接把复 Chebyshev 逼近问题离散化成有限维线性规划问题,再用单纯形法求解这种方法一直被认为只能设计实系数滤波器,而且计算量大、收敛速度慢。本文从直接离散化出发,推导出一种求解此问题的改进的单纯形算法,适用于设计复系数滤波器,极大地减小了计算量,提高了收敛速度。并证明了它与通过求解半无限线性规划的对偶问题而得到的改进的单纯形法是等价的。最后给出了算法的仿真结果。

关键词:FIR 滤波器;线性规划;复 Chebyshev 逼近

中图分类号:TN713 文献标识码:A

Using Linear Programming to Design Complex Coefficients FIR Filters

LU Bi-ying, SONG Qian, LIANG Dian-nong, ZHOU Zhi-min

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper discusses the design of complex coefficients FIR filters in the complex Chebyshev sense. One way to solve this problem is to first formulate the complex Chebyshev approximation problem into finite linear programming through discretization, and then simplex method follows. But it has been thought that this method involves too much computation cost, converges slowly and it is applicable only for designing real coefficients FIR filters. Here a new algorithm is formed, which is a variant of the simplex method. It exhibits good convergence, low computation effort and can be used to design complex coefficients FIR filters. It proves equal to the algorithm formed from the dual of semi-infinite linear programming. An example is presented in the end.

Key words: FIR filters; linear programming; complex Chebyshev approximation

近年来,任意复值频率响应 FIR 滤波器设计问题受到人们的广泛重视[1,4~6],其一个典型应用是作为幅度、相位均衡器[5,6]。在最小化最大误差的准则下,任意复值频率响应的 FIR 滤波器设计问题实际上是一个复 Chebyshev 逼近问题[1,4,5,6]。解决这类问题最有效的方法是通过加旋转因子将复逼近问题转化成实逼近问题,再用线性规划方法来求解。在如何求解这类线性规划问题上存在两个发展方向,第一个方向是直接把连续因子离散化,用有限维线性规划来近似无限维线性规划[1,4],再利用单纯形法来求解,第二个方向是利用无限线性规划的理论,给出其对偶规划,通过求对偶规划来求得原问题的解[5,6]。长期以来,大家一直认为直接离散化方法只能求解实系数滤波器,且计算量大,收敛速度慢,而直接求无限线性规划的对偶这种方法可以设计复系数滤波器,且计算量小,收敛速度快。本文从理论上对直接离散化方法进行了分析,推导出一种改进的单纯形算法,与文献[6]中得出的方法完全相同,从而证明了两种算法在本质上是等价的。

1 复系数 FIR 滤波器设计问题

设待求滤波器的理想频率响应为 $D(\omega)$,用 N 阶实际频域特性为 $H(\omega)$ 的复系数 FIR 滤波器去逼近,定义复值误差函数 $E(\omega)$ 为:

$$E(\omega)=W(\omega)[D(\omega)-H(\omega)] \quad \omega\in\Omega \tag{1}$$

其中 Ω 为 $(-\pi,\pi]$ 上的一个紧支集,$W(\omega)$ 为正的、实的权值函数。令 $\delta=\max\limits_{\omega\in\Omega}\{|E(\omega)|\}$,则在最小化最大误差准则下,滤波器的设计问题就是寻找使 δ 达到最小的系统函数 $H(\omega)$,其数学描述如下:

* 收稿日期:2001-02-29
基金项目:国家部委项目资助(7.5.3.2)
作者简介:陆必应(1976-),男,助教,硕士。

求
$$\min\delta \tag{2}$$
满足
$$|D(\omega)-H(\omega)|\leqslant\delta/W(\omega)\quad \omega\in\Omega \tag{3}$$
由于理想频域响应是任意的,(2)、(3)两式代表的是一个复 Chebyshev 逼近问题,这类问题已被证明最优解存在且唯一[1],且有如下定理成立:

定理1 设 $\{\phi_i(\omega)\}_{i=1}^{N}$ 是 N 维复数子空间的一组基函数,则 $H(\omega)$ 是 $D(\omega)$ 的最佳 Chebyshev 逼近当且仅当 存在 r 个极值频率点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$ 和 r 个正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,$\sum\lambda_i=1$,$r\leqslant 2N+1$,使得
$$\sum_{k=1}^{r}\lambda_k[D(\omega_k)-H(\omega_k)]\phi_i(\omega_k)=0\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{4}$$
一个复数域的线性优化问题在实数域是一个非线性优化问题,但对任意一个复数 z 有:
$$|z|=\max_{\theta\in(-\pi,\pi]}\mathrm{Re}\{z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\} \tag{5}$$
式中 $\theta\in[-\pi,\pi)$ 称为旋转因子,称(5)式为复数的旋转变换公式。

通过旋转变换,可以把上述复逼近问题转化成实数域的线性优化问题。假设滤波器的系数可表示为 $h_{ck}=h_k+\mathrm{j}h_{N+k}\ k=0,1,\cdots N-1$,则滤波器的频率响应为:
$$H(\omega)=\sum_{k=1}^{2N-1}h_k b_k(\omega) \tag{6}$$
其中 $b_k(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$,$b_{k+N}(\omega)=\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$,$k=0,1,\cdots N-1$。又令
$$h=[h_0,h_1,\cdots,h_{2N-1},\delta] \tag{7}$$
$$b=[0,0,\cdots,0,1]^T \tag{8}$$
把(6)、(7)、(8)式代入(2)、(3),并对(2)式作旋转变换,则设计滤波器的复逼近问题可描述为:

求
$$\min hb \tag{9}$$
满足
$$h\left[\mathrm{Re}\{[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)},\mathrm{j},\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega},\cdots,\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\},\frac{1}{W(\omega)}\right]^{\mathrm{T}}\geqslant\mathrm{Re}\{D(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\} \tag{10}$$
其中 $\omega\in\Omega,\theta\in(-\pi,\pi]$。这正是具有有限变量、无限约束的半无限线性规划(SIP)问题的标准形式,(9)式为目标函数,(10)式为约束条件。

2 直接离散线性规划法

为求解上述半无限线性规划问题,先把它离散化。由于上述问题存在两个连续变量 ω 和 θ,系数的离散化过程是二维的。ω 的离散处理就是频域的抽样,θ 的离散化是对旋转变换的一个近似处理。把 θ 在区间 $[-\pi,\pi)$ 均匀离散化为 p 点,则有
$$\theta_j=\frac{2j-1-p}{p}\pi\quad j=1,2,\cdots p \tag{11}$$
假设
$$M=\max_{j=1,2,\cdots,p}\mathrm{Re}\{z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_j}\} \tag{12}$$
则有
$$|z|\cos\frac{\pi}{p}\leqslant M\leqslant|z| \tag{13}$$
上式表明了用 M 近似复数 z 的绝对值的误差范围。显然,随着 p 增大,M 逼近 $|z|$。

把 ω 的离散化值 $\omega_i(i=1,2,\cdots M)$ 和 θ 的离散化值 $\theta_j(j=1,2,\cdots p)$ 代入(10)式,则半无限的线性规划问题转化成有限维的线性规划问题,表示如下:

求
$$\min hb \tag{14}$$
满足
$$hA\geqslant c \tag{15}$$

令 $T_{j,k} = [\cos\theta_j, \cos(\theta_j + \omega_k), \cdots, \cos(\theta_j + (N-1)\omega_j), \sin\theta_j, \cdots, \sin(\theta_j + (N-1)\omega_k, 1/W(\omega_k)]^{\mathrm{T}}$

$Ap_j = [T_{j,1}, T_{j,2}, \cdots, T_{j,M}]$

$cp_j = [\mathrm{Re}\{D(\omega_1)\}\cos\theta_j + \mathrm{Im}\{D(\omega_1)\}\sin\theta_j, \cdots, \mathrm{Re}\{D(\omega_M)\}\cos\theta_1 + \mathrm{Im}\{D(\omega_M)\}\sin\theta_j]$

则有

$$c = [cp_1, cp_2, \cdots cp_p]$$
$$A = [Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_p]$$

矩阵 A 为$(2N+1)\times(Mp)$维,向量 c 为 $1\times Mp$ 维,约束条件是超定的,根据线性规划的对偶理论,很容易得到其对偶形式:

求
$$\max cx \tag{16}$$
满足
$$Ax = b \quad x \geqslant 0 \tag{17}$$

其中 x 和 h 互为对偶变量。对于有限维线性规划,原问题和其对偶问题是等价的。因此可通过求解由(16)、(17)式表示的对偶问题从而得到原问题的解。求解线性规划问题通常利用单纯形法。设 A 的第 i 列向量为 A_i,c 的第 i 个元素为 c_i,则单纯形法的基本步骤为:

(1) 求初始可行基 B 和基本可行解 x。当 x_i 为基变量时 $x_B = B^{-1}b$,否则 $x_i = 0$。

(2) 求对偶变量 $h = c_B B^{-1}$。

(3) 求入基变量。计算非基变量的代价 $b_{0j} = hA_j - c_j$,$j = 1,2,\cdots,Mp$,若存在 i,使得 $b_{0i} < 0$,则选一个变量,计其列序号为 s,作为入基变量;若无,则迭代终止,已得最优解。

(4) 求出基变量。计算入基变量的列向量 $d_s = B^{-1}A_s$,若对所有的 j,$d_s(j)\leqslant 0$,$j = 1,2,\cdots,2N+1$,步骤终止,问题无最优解。相反,求使比率 $b(i)/d_s(i)$达到最大值的 i 记为 r,则 r 行对应的基变量记为 B_{j_r}是出基变量。

(5) 用 A_s 代替 B_{j_r},形成新基,求其逆 $\bar{B}^{-1} = E_{rs}B^{-1}$和新的基本可行解 $x_{\bar{B}} = E_{rs}x_B$。再转到步骤(2)

3 算法的改进

通用单纯形计算量主要集中在求非基变量的代价上,每个循环要进行$(2N+1)Mp - (2N+1)^2$ 次实数乘法运算。对滤波器设计问题,考虑到 h、A 和 c 的具体形式,非基变量的代价为:

$$b_{0i} = hA_i - c_i \tag{18}$$
$$= \mathrm{Re}\Big\{\Big(\sum_{k=0}^{N-1} h_{ck}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_t} - D(\omega_t)\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_q}\Big\} + \frac{\delta}{W(\omega_t)} \tag{19}$$
$$= \frac{\delta}{W(\omega_t)} - \mathrm{Re}\{(D(\omega_t) - H(\omega_t))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_q}\} \tag{20}$$

故有
$$W(\omega_t)b_{0i} = \delta - W(\omega_t)\mathrm{Re}\{(D(\omega_t) - H(\omega_t))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_q}\} \tag{21}$$

式中 $t = i - M(q-1)$,$1\leqslant t\leqslant M$,$q = [(i-1)/M] + 1$,$1\leqslant q\leqslant p$。虽然任意 $b_{0i} < 0$ 对应的变量均可作为入基变量,为提高收敛速度,通常希望代价越小越好,一般的文献中通常采用所谓的'最陡下降'法,即最小代价对应的变量作为入基变量,而我们在此选择加权代价 $W(\omega_t)b_{0i}$最小值对应的变量作为入基变量,加权代价最小等价于上一次迭代求得的滤波器的频域响应和理想频域响应加权误差函数 $E(\omega)$绝对值达到最大,故入基变量对应的 ω_t 即为$|E(\omega)|$最大值对应的频率点 $\omega_{\max}$,θ_q 即为 $\arg(E(\omega_{\max}))$。这样在设计滤波器的过程中,只要求得线性规划问题的一个初始可行基和初始可行解就不需要显式地给出旋转变化角度的离散值,也不需要显式地列出矩阵 A,只要求出每次迭代误差函数的加权最大值即可。由于离散化的影响,使误差达到最大的 $\omega_{\max}$可能不唯一,此时采用最小下标准则,即取最小 t 对应的频率点。下面介绍改进的单纯形法的具体细节及其存在的优点。

在初始值的求法上,采用与文献[6]相同的人工变量法求初始可行基。在第三步求入基变量如前所述是通过求前一次迭代得到的滤波器频域响应和理想频域响应加权误差函数 $E(\omega)$最大绝对值得到

的。可采用补零 FFT,需进行 $2M\log M$ 次实数乘法(复数乘法均按4次实数乘法计算,而没有考虑特殊情况)。如采用普通单纯形法,为保证精度,一般要求 $p\geqslant 128$,其计算量要大两个数量级。

由线性规划问题的推导过程可知,(21)式中的 δ 为目标函数值。对求最大值的线性规划问题,目标函数递增并逼近最优解,即 δ 小于并随着迭代次数的增加逼近给定阶数最优滤波器的最大频域误差,这样在迭代过程中可以确定给定阶数的滤波器最优解能不能满足实际性能要求,如不能满足要求则及时终止迭代,重新选择滤波器阶数。为进一步减小计算量,对达到最优解的条件 $b_{0i}\geqslant 0$ 作适当的修改,设最大频域误差对应的频率为 ω_t,令 $\varepsilon=\dfrac{W(\omega_t)\,b_{0t}}{\delta}$,则 ε 可认为是本次迭代误差相对于误差最优值的相对改善率对相对改善率设计一个门限。每次迭代后计算 ε,若小于门限,则终止循环,取此近似最优解为所求解,这样滤波器性能几乎没有损失,却可以减小迭代次数。

4 无限对偶规划法

前文已经指出(9)、(10)式表示的是有限变量、无限约束的半无限线性规划(SIP)问题,令 $x\in[0,1]$ 为 ω、θ 的正实值函数,直接写出其对偶形式

求
$$\max_X \iint_{\omega\vartheta} x(\omega,\theta)\,\mathrm{Re}\,\{D(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\omega \tag{22}$$

满足
$$\iint_{\omega\vartheta} x(\omega,\theta)\left[\mathrm{Re}\,\{[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)},\mathrm{j},\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega},\cdots,\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\},\frac{1}{W(\omega)}\right]^{\mathrm{T}}=b \tag{23}$$

这是一个约束条件为 $2N+1$、变量为连续变量的半无限线性规划问题。据此对偶问题 D. Burnside 和 T. W. Parks[5] 给出求解此问题的一种改进的单纯形算法,称之为无限对偶规划法,文献[6]对此方法作了较大的改进,具体算法参见文献[5,6],下面证明此算法和直接离散线性规划法的一致性。

对于原问题和对偶问题等价的无限线性规划问题,线性规划理论的松紧关系仍然成立。本问题的松紧关系如下:h^0 和由 ω^0、θ^0 决定的 x^0 分别是最优解和对偶最优解的充要条件是:
$$(h^0B_j-c_j)x_j^0=0,\ j=1,2,\cdots,2N+1 \tag{24}$$
如果 $x_j^0>0, j=1,2,\cdots,2N+1$,上式可改写成如下形式
$$(H_{opt}(\omega_j^0)-D(\omega_j^0))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_j^0}+\frac{\delta}{W(\omega_j^0)}=0 \tag{25}$$
亦即
$$W(\omega_j^0)E_{opt}(\omega_j^0)=\|E_{opt}\|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_j^0} \tag{26}$$
显然,(26)式表明 ω_j^0,θ_j^0 是最优加权误差对应的频率和相位点。因此在迭代过程中,求入基变量时只需要直接把上次迭代求得的加权误差最大值点对应的变量作为入基变量,这样就得到了与直接离散法相同的算法。实际上,当 b_{0i} 逼近0时,由(20)式直接得到(36)式,这正从本质上说明了两种方法的等价性。

5 仿真结果

大量的仿真实验表明,本文提出的设计复系数 FIR 滤波器的算法与现有的设计复系数滤波器的算法相比,计算量小,收敛速度快,稳健性好,适合于设计高阶复系数滤波器。文献[6]对此作了比较。下面给出一个设计复系数 FIR 滤波器的实例。设一个幅相均衡器经归一化处理后的通带为 $f_p=[-0.22, 0.22]$,其通带幅度特性和相位特性如图1和图2所示。

用一个64阶复系数滤波器来逼近此均衡器,在阻带具有40dB抑制的情况下,其幅度误差和相位误差分别如图3和图4所示。仿真实验表明本文算法比文献[5]算法效率提高了一个数量级。

6 结论

文中讨论了在复 Chebyshev 逼近意义下用线性规划法设计复系数 FIR 滤波器问题。从直接离散化

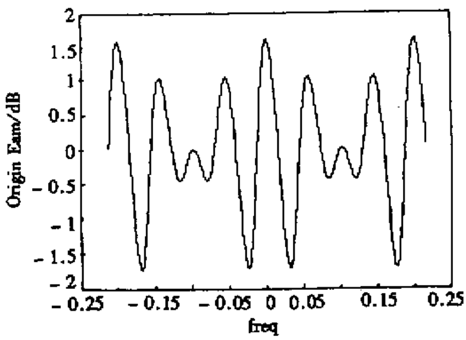

图 1 通带幅度特性

Fig.1 Amplitude characteristic of pass band

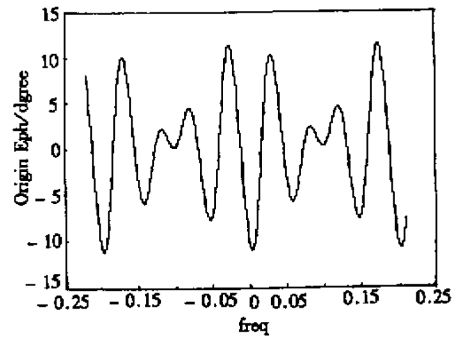

图 2 通带相位特性

Fig.2 Phase characteristic of pass band

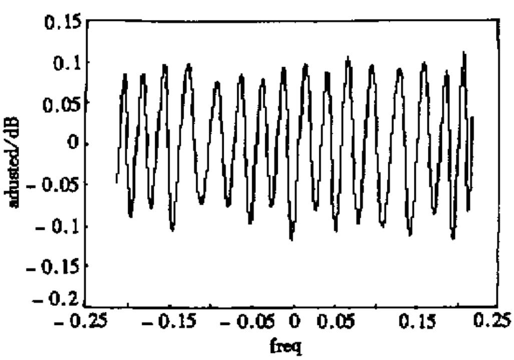

图 3 幅度误差

Fig.3 Amplitude error

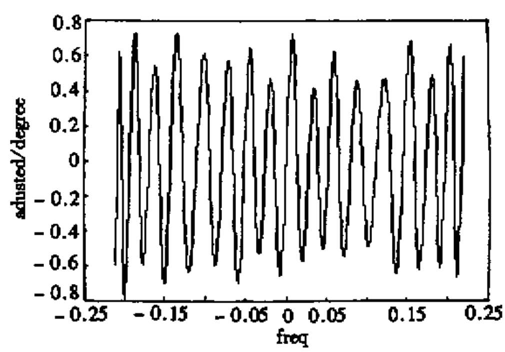

图 4 相位误差

Fig.4 Phase error

出发,推导出一种求解此问题的改进的单纯形算法。该算法适用于设计复系数滤波器,具有优良的性能。并从理论上证明了它与无限对偶规划法是等价的。仿真结果说明了算法的有效性。

参考文献:

[1] Chen X, Parks T W. Design of FIR filters in the complex domain[J]. IEEE. Trans. Acoust. Speech Signal Processing, 1987, Assp-35 :144-153.

[2] Streit R L. Solution of systems of complex linear equations in the L_∞ norm with constraints on the unknowns [J]. SIAM. J. Sci. Stat. Comp., 1986, 7(1) :132-149.

[3] Streit R L. Algorithm 635 : An algorithm for the solution of system s of complex linear equations in the L_∞ norm with constraints on the unknowns [J]. ACM Trans. Soft., 1985, 11(3) :242-249.

[4] Steiglitz K. Design of FIR digital phase networks [J]. IEEE. Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1981. Assp-29(2) :171-176.

[5] Burnside D, Parks T W. Optimal design of FIR filters with the complex Chebyshev error criteria [J]. IEEE. Trans. Signal Processing, 1995, 43 (3).

[6] 陆必应,宋千,周智敏.一种在复频域设计 FIR 滤波器的算法[J],信号处理,2000,16(2) ;131-136.

[7] 马仲蕃.线性整数规划的数学基础[M].北京 科学出版社,1995.