国 防 科 技 大 学 学 报
第23卷 第5期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.23 No.5 2001

文章编号：1001-2486（2001）05-0013-04

导弹落点精度的鉴定方法——概率圆方法*

程光显[1]，张士峰[2]

（1. 中国航天科技集团一院一部，北京 100076；2. 国防科技大学航天与材料工程学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：导弹的落点精度包括落点的准确度与密集度。对于子样很小的情况，分别鉴定准确度和密集度是有一定的难度。本文提出了采用概率圆的综合鉴定方法。当落入概率圆的导弹数大于等于要求的数时就接收，否则拒绝。文中给出了如何确定落入概率圆的导弹数，并且给出了该方法的风险。最后以仿真实例说明了方法的有效性。概率圆方法简便易行，便于工程应用。

关键词：概率圆；落点精度；鉴定方法；圆概率偏差；风险
中图分类号：O213.2 **文献标识码**：A

Assessment for the Accuracy of the Fall Points—Probability Circle Method

CHENG Guang-xian[1]，ZHANG Shi-feng[2]

(1. The First System Design Department of the First Research Academy of CASC, Beijing 100076, China;
2. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The performance of the missiles is determined mostly by the accuracy and dispersion of the random fall points. In small samples case, it is difficult to assess respectively the accuracy and dispersion. The integration assessment approach adopting probability circle method is proposed. The performance is accepted when the number which fall into the probability circle is larger than or equal to the number predetermined, otherwise it is rejected. The producer's risk and consumer's risk are also given. Finally, the simulation shows that the approach proposed in this paper is available. Probability circle method is simple and easy for practical applications.

Key words: probability circle; accuracy of the fall points; assessment method; Circular error probability (CEP); risk

导弹的战术技术指标（简称“战标”）规定了射击准确度与射击密集度两个指标，不仅要求导弹有一定的密集度，而且对落点散布中心离开目标点的距离也有要求。设对平面目标射击，以目标为心，射击方向为纵轴，垂直于射击方向为横轴，以（X，Z）表示落点坐标，且（X，Z）服从正态分布，纵横向独立，（X，Z）$\sim N$（μ_x，μ_z，σ_x^2，σ_z^2）。此时可以将战标综合为一个指标，就是相对于目标点的圆概率偏差（CEP），由下式给出，

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z}\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant R^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(z-\mu_z)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=P \tag{1}$$

式中 $P=50\%$ 时，R 就是圆概率偏差（CEP）；μ_x，μ_z 为纵、横向的射击准确度（即系统误差）要求；σ_x，σ_z 为纵、横向的射击密集度（即均方差）要求。用一个指标 R（或 CEP）可综合反映四个指标（μ_x，μ_z，σ_x，σ_z），这样就精简了鉴定方法。

对于子样容量较大的情况，应该有 50% 的导弹落在以 CEP 为半径的圆内，但是由于导弹非常昂贵，不可能进行很多次试验，只能进行极少数的试验，子样容量不可能太大。这就是典型的小子样情况。此时，不可避免对研制方和使用方造成一定的风险。因此鉴定方法的好坏，还要看风险有多大，双方（研制方和使用方）能否接受。

1 落入概率圆内的导弹数的确定

由（1）式，当战标规定的准确度与密集度换算到 μ_x，μ_z，σ_x，σ_z 后，在 $P=50\%$ 时，求出的

* 收稿日期：2001-03-29
作者简介：程光显（1936-），男，研究员。

R 就是圆概率偏差 CEP。令总的试验次数为 n，则

$$m^* = P \cdot n = \frac{n}{2} \tag{2}$$

有 m^* 发导弹落入以 CEP 为半径的圆内检验通过，导弹的精度符合战标要求，否则不符合战标的要求。

同样的道理，不同的概率 P 可以得到不同的以 R 为半径的圆，也可以得到不同的 m^*。这就是不同概率意义下的落入圆半径和要求落入的导弹数。由于导弹数是整数，因此以 m^* 为不同的整数时，求出相应的概率及相应的落入圆半径 R。

例如，当 $n=8$ 且 $\mu_x=\mu_z=70.71\text{m}$，$\sigma_x=\sigma_z=424.66\text{m}$ 时，有表1成立，表中 R（m^*）表示对应于 m^* 的概率圆半径。

表1 圆半径和落入圆个数的关系

Tab.1 The relation between radius and the number which fall into the circularity

m^*	占抽样数的百分比	R
1	12.5%	R（1）=223
2	25.0%	R（2）=327
3	37.5%	R（3）=418
4	50.0%	R（4）=507
5	62.5%	R（5）=603
6	75.0%	R（6）=717
7	87.5%	R（7）=878

在抽样的8发导弹中，若有一发导弹的落点距目标点的距离小于 R（1）时，则认为该批研制的导弹满足战标要求，同样若有两发导弹的落点都小于 R（2）时，则认为满足要求，其余类推。当不满足表1所列的 m^* 和 R 值的要求时，就认为不满足战标的要求。显而易见，当满足要求时就可以结束试验，因此这种方法还有序贯检验的思想，可以节省导弹的试验发数。表1是对 $n=8$ 而言的，对不同的抽样数也可以按上述方法进行。

2 概率圆方法带来的风险

概率圆综合鉴定方法采用的是简单假设检验

$$H_0: \text{CEP} = \text{CEP}_0 \leftrightarrow H_1: \text{CEP} = \text{CEP}_1 = \lambda \text{CEP}_0 \tag{3}$$

其中 $\lambda>1$。

令 m 为落入以 R 为半径的圆内的导弹数，取 m 为统计量，则

$$P(m \mid H_1) = C_n^m P_1^m (1-P_1)^{n-m}$$

$$P(m \mid H_0) = C_n^m P_0^m (1-P_0)^{n-m} \tag{4}$$

$$P_0 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z} \iint_{x^2+z^2 \leqslant R^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-\mu_z)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{5}$$

$$P_1 = \frac{1}{2\pi\lambda^2\sigma_x\sigma_z} \iint_{x^2+z^2 \leqslant R^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\lambda\mu_x)^2}{\lambda^2\sigma_x^2} + \frac{(z-\lambda\mu_z)^2}{\lambda^2\sigma_z^2}\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{6}$$

使用方风险 β 是在 H_1 为真时，采纳了 H_0 的概率；研制方风险 α 是 H_0 为真时，拒绝 H_0 的概率。因此有

$$\beta = P(m \geqslant m^* \mid H_1) = \sum_{m=m^*}^{n} C_n^m P_1^m (1-P_1)^{n-m} \tag{7}$$

$$\alpha = P(m < m^* \mid H_0) = 1 - \sum_{m=m^*}^{n} C_n^m P_0^m (1 - P_0)^{n-m} \tag{8}$$

对于表1的情况，在$\lambda=1.5$时，计算相应的P_0，P_1，α，β值，见表2。

表2　双方的风险（针对表1的检验方案）

Tab.2　Producer's risk and consumer's risk for the testing plan presented in tab.1

m^*	P_0	P_1	α	β
1	0.125	0.0577	0.3436	0.3784
2	0.250	0.1200	0.3671	0.2480
3	0.375	0.1888	0.3697	0.1790
4	0.500	0.2651	0.3633	0.1358
5	0.625	0.3532	0.3486	0.1098
6	0.750	0.4600	0.3215	0.0982
7	0.875	0.6031	0.2637	0.1097

从表2可以看出，这样制订的概率圆的鉴定方法，研制方风险要比使用方风险大。应该讲，α和β基本相当才是比较好的鉴定方案。为此，调整m^*就可以改变α和β的值。在同一P_0，P_1情况下，当m^*减少时，α就减少，β就增加；反之亦然。但是m^*是落入要求圆内的导弹数，是整数，调整m^*时，α和β变化较剧烈。因此不改变m^*而改变落入要求圆的半径R，当R增大时，α就减少，β就增加；反之亦然。通过改变R来改变P_0，P_1，达到调整α和β的目的，使两者风险基本相当。在控制α和β之差为1%左右时，计算结果见表3。

表3　导弹落点精度鉴定方案

Tab.3　The testing plan of the accuracy of the fall points

m^*	R	P_0	P_1	α	β
1	218	0.1200	0.0553	0.3596	0.3656
2	345	0.2750	0.1332	0.3080	0.2896
3	457	0.4300	0.2210	0.2560	0.2510
4	559	0.5700	0.3128	0.2235	0.2180
5	668	0.7000	0.4144	0.1941	0.1968
6	791	0.8150	0.5275	0.1710	0.1836
7	934	0.9050	0.6487	0.1721	0.1672

3　仿真实例

假设战标要求的射击准确度为100m，射击密集度的圆概率偏差为500m。令纵向和横向相等，换算成纵向和横向的射击准确度为70.71m，纵向和横向的射击标准差为424.66m。按此产生伪随机数3000个，经检验基本符合正态分布。统计计算的结果均值为70.77m，标准差为424.63m，与原要求基本符合。

因此说，该3000个子样表现值是符合精度指标的，若全部作为子样来鉴定是符合战标要求的。若从3000个数中抽取若干个做评定（即小子样评定），其结果应该是多数满足要求的，这样的评定方法才是合理有效的。由于抽取的样本容量不大（例如8发数据），因此会犯一定的错误（包括使用方与研制方风险），在所难免。

从3000个子样表现值中随机地抽取8个（纵向和横向）数，假设这8个数相当于8个导弹的全程落点，利用这些样本来评估导弹的精度。由于是随机地抽取，具有一定的偶然性，因此做了10组

重复试验。概率圆检验的结果见表4。

表4 仿真试验结果

Tab.4 The results of simulation

组数	合格/不合格	结束试验时的次数
1	合格	3
2	合格	4
3	不合格	8
4	合格	7
5	合格	7
6	合格	3
7	合格	2
8	合格	3
9	合格	7
10	合格	7

10组试验中有1次不合格没有通过外，其余9次全部合格。最少的一组试验只需进行两发导弹的试射就可以结束试验，节省了很多费用。

4 结束语

文中讨论了导弹落点精度的综合鉴定方法—概率圆方法，可操作性强，并结合序贯的思想减少了导弹试验次数。仿真结果表明，这种鉴定方案是合理有效的。更进一步的工作则需要充分利用验前信息并结合工程实践开展应用研究。

参考文献：

[1] 张金槐，唐雪梅. Bayes方法［M］. 长沙：国防科技大学出版社，1993.
[2] 夏胜平，张金槐. 命中精度评定的一种改进方法［A］. 2000年航天测控技术研讨会论文集，北京，2000年6月，85-91.
[3] 张士峰，夏胜平. 导弹落点精度的综合评定方法［J］. 北京：兵工学报.

（上接第30页）

参考文献：

[1] Gnoffo P A et al. Computational Aerothermodynamic Design Issues for Hypersonic Vehicle［R］. AIAA 97－2473，1997.
[2] 沈建伟，瞿章华. 电离非平衡粘性激波层低雷诺数钝体绕流［J］. 空气动力学学报，1986，4（4）.
[3] 欧阳水吾，苏玉宏. 高超声速有攻角钝头体三维化学非平衡粘性激波层流动数值计算［J］. 宇航学报，1992，3.
[4] 周学华，竺乃宜. 高超声速小钝锥尾流非平衡辐射研究［J］. 空气动力学学报，1996，14（3）.
[5] Gupta R N etc. A Review of Reaction Rates and Thermodynamic and Transport Properties for an 11-species Air Model for Chemical and Thermal Non-equilibrium Calculations to 30000K［R］. NASA RP 1232，1990.
[6] Park C. Problems of Rate Chemistry in Flight Regime of Aeroassisted Orbital Transfer Vehicles［J］. Progress in Aeronautics and Astronautics，1985，96：511-537.
[7] 张涵信. 无波动、无自由参数耗散差分格式［J］. 空气动力学学报，1989，6（2）.
[8] MacCormack R W，Candler G V. The Solution of the Navier-Stokes Equations Using Gauss-Seidel Line Relaxation［J］. Computer & Fluids，1989，17（1）：135-150.
[9] Anderson J D Jr. Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics［M］. New York：McGraw-Hill Book Company，1989：557-563.