

文章编号: 1001-2486 (2001) 05-0031-05

## 索的 UL 列式分析方法\*

肖万伸<sup>1,2</sup>, 曾庆元<sup>3</sup>, 唐国金<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学航天与材料工程学院力学博士后流动站, 湖南 长沙 410073;

2. 湖南大学工程力学系, 湖南 长沙 410082; 3. 中南大学铁道校区, 湖南 长沙 410075)

**摘要:** 通过求解索的微分方程边值问题, 提出了分析索的收敛迭代公式。利用迭代解可顺利地确定索端位置坐标差、索力及索重之间的关系。算例表明: 本文计算索的方法, 理论上可达到任意高的精度, 可十分方便地用于含有索或索网混合复杂结构物的大变形分析, 用这种方法能解决斜拉桥缆索应力松弛的计算问题。

**关键词:** 索; 缆索; 悬索; UL 列式; 大变形**中图分类号:** O341 **文献标识码:** A

## A UL Formulation for Cables

XIAO Wan-shen<sup>1,2</sup>, ZENG Qing-yuan<sup>3</sup>, TANG Guo-jin<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073; 2. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082; 3. Railway Campus of Central South University, Changsha 410075 China)

**Abstract:** A convergent iterative solution method for cables is formulated after solving the boundary problem with differential equation of a cable. By using the iterative solution, it is simple to determine the relation among the coordinate difference of cable-end position, cable tension and cable weight. The examples demonstrate that the present scheme for cable calculation can be as theoretically concise as required, and it is convenient to be used for analysing largely deformed complicated structures including cables or cable nets, and the present method makes it possible to solve the divergence problem of stress relieve of cables caused by employing some techniques such as Ernst Model for cables.

**Key words:** rope; cable; catenary cable; UL formulation; large deformation

索是只能拉不能压的柔性结构。各段索之间的内力只有轴向拉力, 自重引起的垂度使索的内力与其端点位移之间表现出几何非线性。

国内外不少学者研究过缆索的非线性行为。Ernst<sup>[1]</sup>将缆索折算成直杆, 用含有索截面上拉应力的等效弹性模量来模拟因缆索重力垂度引起的几何非线性。F. Leonhardt 等<sup>[2]</sup>、Gimsing<sup>[3]</sup>、Tung<sup>[4]</sup>、Poddy 等<sup>[5]</sup>也采用了相同的观点。高征铨等<sup>[6]</sup>提出了拉力增量与位移增量之间的切线刚度矩阵。加藤诚平<sup>[7]</sup>、单圣涂等<sup>[8]</sup>、金问鲁<sup>[9]</sup>、余学进等<sup>[10]</sup>采用基于“抛物线”理论的计算公式。Ozdemir<sup>[11]</sup>用拉格朗日函数插值法, Jayaraman 等<sup>[12]</sup>、Gambhir<sup>[13]</sup>用曲线单元法来分析索的非线性。

目前国内外采用基于抛物线理论的计算公式<sup>[10]</sup>, 实质上是取自重沿索长均匀分布下形成的“悬链曲线”方程级数展开式二阶以下项并对其加以修正后得到的近似理论。它在物理意义上隐含了两条相互对立的近似假设: 一是视索的自重沿水平轴均匀分布; 二是视索的自重沿曲线均匀分布。故“抛物线”理论的适应范围十分有限, 仅适用于小垂度、矢跨度比小于百分之八的情形。我国学者<sup>[6, 14, 15]</sup>提出的“悬索曲线”计算方法, 即取“悬链曲线”方程级数展开式四阶以下项并修正四阶项后所推导的近似公式扩大了设计范围, 但也包含了两条相互对立的基本假设: 一是视索自重沿水平方向递增分布, 而递增梯度为一常数; 二是视索自重沿曲线均匀分布, 因此限制了其应用范围。为了消除这些矛盾, 张震陆<sup>[16]</sup>提出了“悬链段”方法。该方法以两等高支座之间的“水平悬链线”为基础, 对于两支座位于不同高度的情形, 该文采取将实际悬链线补齐为“水平悬链线”的办法, 可考虑索的弹性变

\* 收稿日期: 2001-01-10

作者简介: 肖万伸 (1959-), 男, 副教授, 博士。

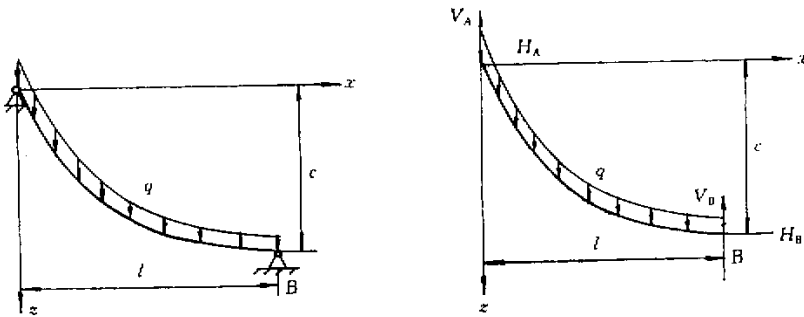
形。数值比较结果表明，“悬链段”方法具有较高的精度。

上述各种计算模式中，大多数基于抛物线假设，只有少数采用悬链线理论，但都是取展开式中前若干项作为近似，这样一来，有时出现很大误差，有时甚至产生谬误，为此，本文提出了适用范围几乎不受限制的索单元方法，该方法用于索网结构的有限元分析十分有效。

### 1 索分析方法

如图1、2所示，索承受自重分布载荷作用及支座反力作用，它满足方程

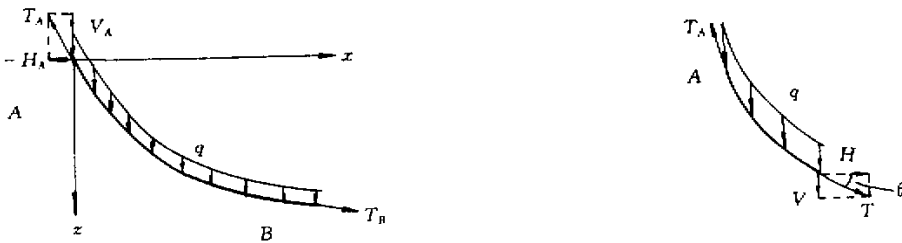
$$H \frac{d^2 z}{dx^2} + q \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0; \quad x = 0 : z = 0; \quad x = l : z = c$$



(a) 斜拉索及其约束  
(a) Constraints and cable

(b) 斜拉索的受力图  
(b) Forces exerted on cable

图1  
Fig.1



(a) 斜拉索索端张力及其分解  
(a) Tensions of cable ends and their components

(b) 斜拉索任意截面处的张力及其分解  
(b) Tension components of an arbitrary cross-section

图2  
Fig.2

其解为

$$z = \frac{H}{q} \left[ \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \left( \frac{2\beta x}{l} - \alpha \right) \right] \tag{1}$$

式中

$$\alpha = \operatorname{sh}^{-1} \left( \frac{\beta c}{l \operatorname{sh} \beta} \right) + \beta, \quad \beta = \frac{ql}{2H} \tag{2a, 2b}$$

因索载竖直向下，水平分量为零，故索中拉力的水平分量  $H = \text{常数}$ 。索力  $T$  与其水平方向分量  $H$  的关系为

$$T = \frac{H}{\cos\theta}$$

式中各量如图 1~2 中所示。

线应变可表为

$$\epsilon = \frac{H}{EA \cos\theta}$$

当索为线弹性时，上式中的  $E$  为杨氏弹性模量；当索为弹塑性时， $E$  可用应力—应变关系曲线的割线模量代替。

索的伸长为

$$s - s_0 = \int_0^{s_0} \epsilon(s') ds'$$

其中： $s_0$  为索的初始长度， $\epsilon$  为柯西应变，索的现时构形长度为

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

算出上述二式右端积分并整理可得

$$s - s_0 = \frac{Wl}{4EA \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2}} \left\{ \frac{1}{\beta} \left[ \text{sh}^2 \beta + 2 \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2 \right] \text{cth} \beta + 1 \right\} \quad (3)$$

$$s = \frac{l}{\beta} \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2} \quad (4)$$

式中， $W$ 、 $A$  分别为索重和缆索横截面面积。

联立 (3) (4) 可得求解  $\beta$  的方程

$$F(\beta) = \frac{W}{4EA \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2}} \left\{ \frac{l}{\beta} \left[ \text{sh}^2 \beta + 2 \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2 \right] \text{cth} \beta + 1 \right\} - \frac{l}{\beta} \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2} + \frac{s_0}{l} = 0 \quad (5)$$

容易验证， $F(0) \sim +\infty$ ， $F(+\infty) \sim -\infty$ ，从而连续函数  $F(\beta)$  在  $\beta \in (0, +\infty)$  范围内有零点。

方程 (6) 的根用迭代方法求出。算出  $\beta$  后，就可按下式算  $H$ ：

$$H = \frac{W}{2 \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2}}$$

$V_B$ 、 $V_A$ 、 $H_A$ 、 $H_B$  可由静力平衡关系确定如下。

$$V_B = -H \left\{ \frac{\beta c}{l} \text{cth} \beta - \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2} \right\}, V_A = W - W_B, H_B = H, H_A = -H$$

到此索端力已全部求出。

柔索任一截面的拉力和拉应力分别为

$$T = \frac{H}{\text{sh} \beta} \left\{ \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2} \text{ch} \left( \beta - \frac{2\beta x}{l} \right) + \frac{\beta c}{l} \text{sh} \left( \beta - \frac{2\beta x}{l} \right) \right\}, \sigma = \frac{T}{A}$$

## 2 算例

### 2.1 例 1

这里以文献 [8] [16] 共同计算过的“九条有代表性悬索”为例。文献 [8] [16] 分别利用“八次曲线”理论和“悬链段”方法，对于该例，用本文方法毋需通过方程 (5) 迭代，就能得到显式的代数形式严格解。文献 [8] [16] 及本文结果列于表 1 中。

表1 九条有代表性悬索解

Tab.1 Solutions for nine typical catenary cable

c (m)		000	000	000	300	300	300	500	500	500
H (kg)		1665	3330	6660	1665	3330	6660	1665	3330	6660
W (kg)	[ 8 ]	3913	3470	3365	4039	3611	3510	4253	3849	3754
	[ 16 ]	3913. 4	3470. 5	3367. 6	4038. 92	3611. 42	3509. 96	4252. 89	3849. 23	3754. 21
	本文	3913. 42	3470. 50	3364. 80	4038. 92	3611. 42	3509. 97	4252. 89	3849. 23	3754. 21
s <sub>0</sub> (km)	[ 8 ]	1175	1402	1010	1213	1085	1054	1277	1156	1127
	[ 16 ]	1175. 2	1042. 2	1011. 3	1212. 89	1084. 51	1054. 04	1277. 14	1155. 92	1127. 39
	本文	1175. 20	1042. 19	1010. 45	1212. 89	1084. 51	1054. 04	1277. 14	1155. 92	1127. 39
n <sub>0</sub>	[ 8 ]	0. 2716	0. 1276	0. 0628	0. 2803	0. 1428	0. 0655	0. 2951	0. 1416	0. 0701
	[ 16 ]	0. 27154	0. 12762	0. 06282	0. 280248	0. 132808	0. 0655367	0. 295095	0. 141553	0. 070097
	本文	0. 271540	0. 127626	0. 062826	0. 280248	0. 132808	0. 0655368	0. 295095	0. 141554	0. 070097
T <sub>A</sub> (kg)	[ 8 ]	2569	3755	6869	3151	4407	7665	3624	4997	8497
	[ 16 ]	2569. 2	3755. 0	6869. 2	3151. 12	4406. 97	7665. 07	3624. 60	4997. 28	8496. 69
	本文	2569. 23	3754. 99	6869. 21	3151. 12	4406. 97	7665. 07	3624. 60	4997. 28	8496. 69
T <sub>B</sub> (kg)	[ 8 ]	2569	3755	6869	2152	3407	6666	1960	3332	6832
	[ 16 ]	2569. 2	3755. 0	6869. 2	2152. 12	3407. 97	6666. 07	1959. 60	3332. 28	6831. 69
	本文	2569. 23	3754. 99	6869. 21	2152. 12	3407. 97	6666. 07	1959. 60	3332. 28	6831. 69
T <sub>C</sub> (kg)	[ 8 ]	1665	3330	6660	1718	3465	6947	1809	3693	7431
	[ 16 ]	1665	3330	6660	1718. 39	3465. 22	6947. 34	1809. 43	3693. 40	7430. 77
	本文	1665	3330	6660	1718. 39	3465. 22	6947. 34	1809. 43	3693. 40	7430. 77

计算用表达式

$$\beta = \frac{ql}{2H}, \tilde{W} = \sqrt{\text{sh}^2 \beta + \left(\frac{\beta c}{l}\right)^2}, W = 2H\tilde{W}, s_0 = \frac{l\tilde{W}}{\beta}, \alpha = \text{sh}^{-1}\left(\frac{\beta c}{l\text{sh}\beta}\right) + 1$$

$$T(x) = \frac{H}{\text{sh}\beta} \left\{ \tilde{W} \text{ch}\left(\beta - \frac{2\beta x}{l}\right) + \frac{\beta c}{l} \text{sh}\left(\beta - \frac{2\beta x}{l}\right) \right\}, T_A = T(x=0), T_B = T(x=l), T_C(x=l/2)$$

表2 符号对照表

Tab.2 Comparison of variables

本文	c	H	W	s <sub>0</sub>	n <sub>0</sub>	T <sub>A</sub>	T <sub>B</sub>	T <sub>C</sub>	l	q
[ 8 ]	h	H <sub>0</sub>	M <sub>0</sub>	L <sub>0</sub>	n <sub>0</sub>	T <sub>0B</sub>	T <sub>0A</sub>	T <sub>0C</sub>	l <sub>0</sub>	q

文献 [ 8 ] [ 16 ] 的结果均为近似值，而本文结果为严格解。文献 [ 8 ] 用“八次曲线”计算，比本文和文献 [ 16 ] 都麻烦。利用本文的严格解检验可看出，就准确度而言，文献 [ 16 ] 的方法不如文献 [ 8 ] 的方法。

2.2 例2

索索与大变形弹塑性结构连接的超静定系统问题。限于篇幅，只对其作一简介，详细计算见文献 [ 17 ]。笔者用 UL 列式的大变形增量有限元方法，对闽江斜拉桥钢箱梁设计方案的稳定极限承载力进行了数值分析，计算过程中发现，当斜拉桥体系接近极值点失稳时，主梁（钢箱梁薄壁结构）部分梁段向上拱起，斜拉索两端移近而导致索力松弛，这时桥梁界普遍用于缆索计算的等效拉杆模型失效，迭代发散，改用本文所述的悬索 UL 列式方法后，该难题得到了顺利的解决。

### 3 讨论

上述方法可直接用于索端竖向相对距离、水平相对距离均固定不变的情形。对于索端位置发生相对改变的情形，也可用上述方法计算，这时，要将上一加载步末的索端位置作为本加载步内的索端位置，算出本加载步的索端位移增量，将此位移增量叠加到上一加载步末的索端坐标就得本加载步末的真实索端位置。这种计算方法与 UL 列式方法是一致的。在计算时，索将与之联接结构的作用力处理成施加在该结构上的载荷。

用这种方法可以从索的无应力状态开始计算，开始时，拉索两端位于指定的位置，呈直状，假定此时索不受自重作用，载荷为零。从这种状态出发，加第一级载荷，即初载荷。用这里的方法可方便地确定初载荷作用时的索应力。计算时，可用初始状态时索两端的坐标差作为算式中的  $c, l$ ，迭代算出  $\beta$  后，就可算出索端力及索长。这里将恒载分为若干加载步而细化计算，以达到提高精度的目的。

当索有初始拉力时，通过索力也可反求索的初始相对位形及初始索长，从而索有初始拉力的问题就归结于上面讨论过的无初应力计算问题。

当索中同时出现大曲率和塑性变形时，要将索的大曲率弧段细分，以使每一索单元割线模量沿索单元长度大致不变。

可以断言，本文方法能适应钢索（包括索网）结构的一切静力变形计算，当然也能适用于斜拉桥在索力发生松弛时的计算。

### 参考文献：

- [1] Ernst J. H., Der E-modul von seilen unter beruckseilen unter berucksienhtigung des durchanges [J]. Der Bauingenieur, 1965, 40 (2): 52-55.
- [2] Leonhardt F. etc, 陈炳坤译. 美国华盛顿洲, 帕斯科与肯尼威市间跨越哥伦比亚河的预应力混凝土斜拉桥 [J]. 国外桥梁, 1981 (11): 1-28.
- [3] Gimsing N. J. Cable supported bridge, Concept and design [M]. John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [4] Tung D. H. and Kudder R. J. Analysis of cables as equivalent two force member [J]. Engineering Journal, AISC, 1968: 12-19.
- [5] Podolny W. and Scalzi J. B., Construction and design of cable-stayed bridge [M]. John Wiley and Sons, 1976.
- [6] 高征铨, 汪嘉铨, 陈忆渝. 大跨度张拉桥的非线性静力分析 [M]. 北京: 北京工业大学, 1981.
- [7] 加藤诚平. 林业架空索道设计法 [M]. 张德义等译, 北京: 农业出版社, 1965.
- [8] 单圣涤等. 悬索曲线理论及应用 [M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1983.
- [9] 金问鲁. 悬挂结构计算理论 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1981.
- [10] 余学进, 张少钦. 悬索平衡张力的数值解法 [J]. 力学与实践, 1990, 12 (1).
- [11] Ozdemir H, A finite element approach for cable problems [J]. Int. J. Solids and structures, 1979, 15: 424-437.
- [12] Jayaraman H B, Knudson W C. A curved element for the analysis of cable structures [J]. Computer & Structures, 1981, 14: 325-244.
- [13] Gambhir M L, Batchelor. Finite elements for cable analysis [J]. Int. J. of Structure, 1986, and 6 (1): 17-34.
- [14] 沈世钊, 徐崇宝, 赵臣. 悬索结构设计 [M]. 中国建筑工业出版社, 1997.
- [15] 钱若军, 季天健, 蓝侗恩. 索网及索一桁架屋盖结构的静力分析及程序 [A]. 空间结构论文选集 (二) [C]. 中国建筑工业出版社, 1997: 187-195.
- [16] 张震陆, 陈本贤. 柔索分析的“悬链段”方法研究 [J]. 工程力学, 1990, 7 (4): 41-49.
- [17] 肖万伸. 大跨度钢箱梁斜拉桥局部与整体相关屈曲极限承载力分析 [D]. 中南大学博士学位论文 [C], 1999.

