

文章编号 : 1001-2486(2001)05-0084-05

电磁场计算中 FDTD 与 MRTD*

郭汉伟 , 梁甸农 , 刘培国 , 尹家贤

(国防科技大学电子科学与工程学院 , 湖南 长沙 410073)

摘要 :时域有限差分法 (FDTD) 在电磁场数值计算中占有重要的地位。本文发现并证明 FDTD 是时域多分辨分析 (MRTD) 的特例。利用小波 - 伽略金方法求解麦克斯韦方程过程中 , 基函数为一般的小波分析中的尺度函数或小波函数 , 可以得到 MRTD 算法。如果基函数选为 Haar 小波尺度函数 , 可以推得 FDTD 算法。如果基函数选为 Haar 小波包中的尺度函数 , 可以得到高阶 FDTD 算法。通过算例比较 , MRTD 比 FDTD 的计算效率更高。

关键词 :时域多分辨分析 ; FDTD ; 小波 - 伽略金方法

中图分类号 : TM153⁺.1 文献标识码 : A

FDTD and MRTD in Electromagnetic Field Numerical Computation

GUO Hanwei , LIANG Dian-nong , LIU Pei-guo , YIN Jia-xian

(College of Electronic scient Technology , National Univ. of Defense Technology , Changsha , 410073)

Abstract : FDTD is playing a key role in electromagnetic field computation. Moreover , it has been demonstrated that FDTD is special case of MRTD (multiresolution in time domain) if the base function and weight function is Haar scaling function in the course of solving Maxell equations by Wavelet - Galerkin scheme. Higher - order FDTD algorithm corresponds to Haar wavelet packet function.

Key words : MRTD ; FDTD ; Wavelet - Galerkin Method

多分辨分析技术为解决计算量与计算精度之间的矛盾提供了一种可行的途径^{[1~6][8]}。1996 年 , M. Krumpholz 和 Linda P.B. Katehi^[1] 将多分辨分析思想引入麦克斯韦方程求解 , 在时域将电场与磁场分别用三次样条小波的尺度函数或小波函数展开 , 基于小波 - 伽略金方法^[2] , 得到类似于 Yee-FDTD 格式的 MRTD 算法。根据文献 [1] [3] [5] 的报导 , 对于小波解电磁场的时域算法——MRTD (选用三次样条小波为基函数) , 与当前流行的时域算法 FDTD 相比 , 除了有较好的色散特性 , 其最突出的特点是它在对空间进行网格划分以后每个波长采两个点可达到 FDTD 每个波长采 10 个点的精度 , 每个波长采两个点是采样定理——奈奎斯特定理的极限 , 相比之下 , 其对网格个数只有三维 FDTD 1/5³。由此可见 , MRTD 对计算机资源尤其是内存的节省是相当可观的。本文将论述 FDTD 与 MRTD 之间的关系 , 并通过算例比较计算效率。文中证明 , FDTD 是 MRTD 的特例 , 差别在于小波 - 伽略金方法中基函数选取的不同。本文算例中应用正交小波作为基函数比较 FDTD 与 MRTD 的计算效率。

1 FDTD 与 MRTD 的关系

麦克斯韦的标量方程 , 形式如下 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1)$$

* 收稿日期 : 2001-01-20
作者简介 : 郭汉伟 (1975-) , 男 , 博士生。

将电场与磁场用具有紧支撑的尺度或小波函数展开成如下形式，时域用脉冲函数组展开，得到如(2)形式：其中 ${}_kE_{l,m,n}^{\text{px}}$ 和 ${}_kE_{l,m,n}^{\text{py}}$ ， $\epsilon = x, y, z$ ，是基于尺度函数的具有零分辨水平的多尺度采样系数。下标 l, m, n, k 代表离散后的空间与时间坐标：

$$\begin{aligned}
 E_x(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_kE_{l+1/2, m, n}^{\text{px}} h_k(t) \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_m(y) \varphi_n(z) \\
 E_y(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_kE_{l, m+1/2, n}^{\text{py}} h_k(t) \varphi_l(x) \varphi_{m+1/2}(y) \varphi_n(z) \\
 E_z(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_kE_{l, m, n+1/2}^{\text{pz}} h_k(t) \varphi_l(x) \varphi_m(y) \varphi_{n+1/2}(z) \\
 H_x(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l, m+1/2, n+1/2}^{\text{px}} h_{k+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_{m+1/2}(y) \varphi_{n+1/2}(z) \\
 H_y(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m, n+1/2}^{\text{py}} h_{k+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_m(y) \varphi_{n+1/2}(z) \\
 H_z(r, t) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m+1/2, n}^{\text{pz}} h_{k+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_{m+1/2}(y) \varphi_n(z)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$x = l\Delta x, y = m\Delta y, z = n\Delta z, t = k\Delta t$ 。函数 $h_m(x) = h(\frac{x}{\Delta x} - m)$ ，而

$$h(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \tag{3}$$

将式(2)(3)代入方程(1)得到：

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_kE_{l+1/2, m, n}^{\text{px}} \epsilon \frac{\partial h_k(t)}{\partial t} \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_m(y) \varphi_n(z) \\
 &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m, n+1/2}^{\text{px}} h_{k+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{n+1/2}(z)}{\partial z} \\
 &+ \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m+1/2, n}^{\text{px}} h_{k+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x) \frac{\partial \varphi_{m+1/2}(y)}{\partial y} \varphi_n(z)
 \end{aligned} \tag{4}$$

对(4)式应用 $h_{k'+1/2}(t) \varphi_{l'+1/2}(x) \varphi_m(y) \varphi_n(z)$ 作为权函数，应用小波-伽略金原理得到：

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_kE_{l+1/2, m, n}^{\text{px}} \left\langle \frac{\partial h_k(t)}{\partial t} h_{k'+1/2}(t) \right\rangle \varphi_{l+1/2}(x), \varphi_{l'+1/2}(x) \\
 &\quad \varphi_m(y), \varphi_m(y), \varphi_n(z), \varphi_n(z) \\
 &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m, n+1/2}^{\text{px}} h_{k+1/2}(t) h_{k'+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x), \varphi_{l'+1/2}(x) \\
 &\quad \varphi_m(y), \varphi_m(y) \left\langle \frac{\partial \varphi_{n+1/2}(z)}{\partial z}, \varphi_n(z) \right\rangle \\
 &+ \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2}H_{l+1/2, m+1/2, n}^{\text{px}} h_{k+1/2}(t) h_{k'+1/2}(t) \varphi_{l+1/2}(x), \varphi_{l'+1/2}(x) \\
 &\quad \left\langle \frac{\partial \varphi_{m+1/2}(y)}{\partial y}, \varphi_m(y) \right\rangle \varphi_n(z), \varphi_n(z)
 \end{aligned} \tag{5}$$

如果基函数和权函数选为 Harr 尺度函数，那么：根据以下各式可以推导出 FDTD 算法：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x) h_{m'}(x) dx = \delta_{m, m'} \Delta x$$

$$\delta_{m, m'} = \begin{cases} 1 & m = m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x) \frac{\partial h_{m+1/2}(x)}{\partial x} dx = \delta_{m,m'} - \delta_{m,m'+1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \varphi_m(x) dx = \delta_{m,m'} \Delta x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_{m'}(x)}{\partial x} dx = \delta_{m,m'} \Delta x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_{m'+1/2}(x)}{\partial x} dx = \delta_{m,m'} - \delta_{m,m'+1}$$

代入(5)整理后得到：

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\varphi x} (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k,k'}) \delta_{l,l'} \Delta x \delta_{m,m'} \Delta y \delta_{n,n'} \Delta z \\ &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m,n+1/2}^{\varphi y} \delta_{k,k'} \Delta t \delta_{l,l'} \Delta x \delta_{m,m'} \Delta y (\delta_{n,n'} - \delta_{n,n'+1}) \\ &+ \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N {}_{k+1/2} H_{l+1/2,m+1/2,n}^{\varphi z} \delta_{k,k'} \Delta t \delta_{l,l'} \Delta x (\delta_{m,m'} - \delta_{m,m'+1}) \delta_{n,n'} \Delta z \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta t} ({}_{k+1} E_{l+1/2,m,n}^{\varphi x} - {}_k E_{l+1/2,m,n}^{\varphi x}) \\ &= \frac{1}{\Delta y} (H_{l+1/2,m+1/2,n}^{\varphi y} - H_{l+1/2,m-1/2,n}^{\varphi y}) - \frac{1}{\Delta z} (H_{l+1/2,m,n}^{\varphi z} - H_{l+1/2,m,n+1/2}^{\varphi z}) \end{aligned} \quad (6)$$

这就是 FDTD 的差分公式。

如果将基函数换成 Harr 小波包，依照上面的思路，我们可以得到高阶 FDTD 表达式。

以上推导过程证明了这样一个事实：FDTD 是 MRTD 的特例。

2 FDTD 与 MRTD 计算效率的比较

算例(1)

MRTD 中采用 Daubechies 正交小波家族中的 D₂ 小波尺度函数（对应的尺度函数有 2 阶消失矩），通过对文献[2]的几个均匀和介质加载谐振腔的谐振频率计算比较，计算结果精度和效率比较表如下：

表 1 文献[2]中腔体归一化的谐振频率计算结果

Tab.1 Computation result of resonance frequency in^[2]

腔体	FDTD			MRTD		
	归一化的谐振频率	网格大小	执行时间(s)	归一化的谐振频率	网格大小	执行时间(s)
腔体(1)	0.07473	12×6×8	54.9	0.07513	12×6×8	101.2
				0.07593	3×3×2	4.1
腔体(2)	0.05227	12×6×8	59.4	0.05273	12×6×8	102.8
				0.05313	12×3×2	12.5
腔体(3)	0.02633	20×6×8	104.6	0.02660	20×6×8	175.8
				0.02633	8×3×2	8.9
腔体(4)	0.03753	20×6×8	104.8	0.03813	20×6×8	175.9
				0.03793	8×3×8	34.2

从表 1 中可以看出，MRTD 与 FDTD 算法有很高的致性。MRTD 与 FDTD 的网格数目比为 32:1，对于腔体(1)谐振频率的计算程序时间比为 13.4:1。这充分说明了与 FDTD 相比，MRTD 所具有的计算潜力。

算例 (2)

文献 [10] 将采用三次样条小波尺度函数作为基函数的 MRTD 计算微带电路。此处，我们推导基于紧支撑的正交小波计算微带电路的边界条件，三次样条小波并不是紧支撑的，导致在原理推导的过程中作近似，使得公式在理论上出现不完美。文献 [4] 中仅考虑周围是理想导体的封闭系统，因此边界的处理可以使用镜像原理，这样就避开了吸收边界问题。本文应用基于紧支撑的正交小波 MRTD 算法，应用 Mur's 一阶吸收边界条件为例，并加上匹配层 (PML) 来计算微带电路上的场分布。

一维情况下沿 $-Z$ 方向的单项波方程：

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

式中： v 为介质之中波的传输速度； E_x 为截断边界面上的场量。可以得到边界条件的差分格式：

$$E_x^{k+1}(n) = E_x^{k-1}(n) + \frac{2v\Delta t}{\Delta z} \sum_i b(i) E_x^k(n+i) \quad (8)$$

由上式可以看出，某一时刻边界上的场量不仅与这一点前两个时刻的场量有关，而且与该点周围一定区域内上一时刻的场量有关，这也是由于尺度函数的非紧支性造成的。这样，为了求解边界上的场量，作者使用理想匹配层 (PML) 技术^[9]，在边界外增加一无反射的匹配介质层。

仍然考虑一维情况，假设吸收层媒质的介电常数为 ϵ_0 、电导率为 σ ，吸收层内沿 $-Z$ 方向传播的电场满足单向波偏微分方程：

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma' E_x - c \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

式中： $\sigma' = \sigma/\epsilon_0$ ； c 为自由空间中的光速。由于电导率 σ 的突变，直接离散式 (9) 会导致数值反射，因此作变换：

$$E_x(z, t) = \tilde{E}_x(z, t) e^{-\sigma' t} \quad (10)$$

将式 (8) 代入式 (7) 得：

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

按照上述相同的场量展开及矩阵法求解过程，可得式 (15) 的步进迭代公式：

$$E_x^{k+1}(n) = e^{-2\sigma'\Delta t} E_x^{k-1}(n) + \frac{2v\Delta t}{\Delta z} e^{-\sigma'\Delta t} \sum_i b(i) E_x^k(n+i)$$

根据文献 [9]，吸收层厚度 Δ 不能太薄，电导率随离开边界的距离 ρ 的变化关系为

$$\sigma(\rho) = \sigma_m (\rho/\Delta)^n$$

其中： σ_m 为吸收层电导率的最大值； n 表示电导率的变化快慢，一般情况下，取 $n=2$ 。吸收层的外围是理想导电壁，可以运用镜像原理来处理吸收层外面的电场分量。

最后需要指出的是，由上述迭代格式和边界条件求得的场量并非是该点的实际场，而是实际场量的展开系数，这与 FDTD 法是有区别的。事实上，空间任一点的全场可以通过对展开式 (2) 用 δ 取样函数在时间和空间上取样而得。例如，电场分量 E_x 在空间 $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 点 t_0 时刻的全场为

$$E_x(r_0, t) = \iiint E_x(r, t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0) dx dy dz dt \\ = \sum_{l', m', n'} E_x^k \left(l' + \frac{1}{2}, m', n' \right) \phi_{l'+1/2}(x_0) \phi_m(y_0) \phi_n(z_0) \quad (12)$$

由于尺度函数是紧支撑的，因此式 (12) 在实际求解时只要取前几项即可。

对微带线结构进行分析：金属导体的宽度 4 mm，微带线厚度，介质厚度 0.94 mm，介质相对介电常数 2.65，FDTD 的参数选择如下：网格数目： $80 \times 40 \times 10$ (X, Y, Z)，计算微带表面电场分布结果如图 1。如果单独对 X, Y 方向应用 DB2 小波尺度函数，单向波边界条件，而 Z 方向采用 HARR 小波的尺度函数 (FDTD) 差分格式计算，得到的场分布如图 2。在内存占用上减少了 4 倍，结果依

然令人满意。

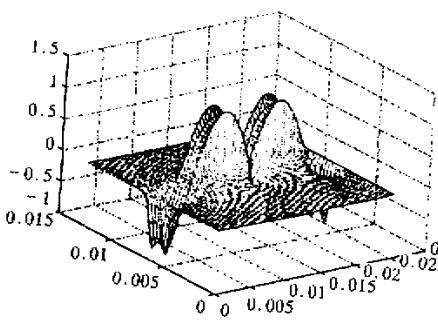


图1 FDTD计算微带线的场分布

Fig.1

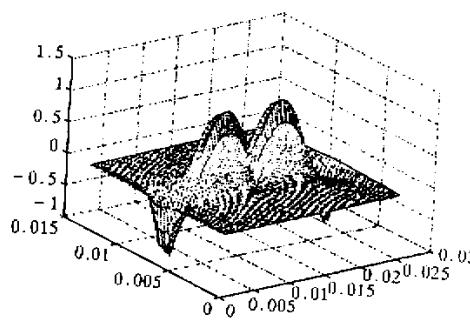


图2 应用MRTD计算微带线场分布

Fig.2

4 结 论

本文发现并证明了FDTD是MRTD的特例，二者区别在于基函数选取的不同，基函数可以通过某种方法构造^[7]；通过算例说明，选取支撑区域较长的基函数，MRTD可以节省计算内存，提高计算效率。

虽然MRTD算法计算大目标可以以几何级数的量级节省计算机内存，但由于其基函数互相有重叠，导致了边界条件的复杂性^[8]。从当前的文献来看^[1-5]，可用的边界条件有两种：单向波和PEC边界。MRTD的PML边界条件有待于进一步的研究^[8]。FDTD从算法提出到边界条件完善走过了很长的路程，MRTD的完全匹配边界条件的研究必然极富挑战性，有重大的理论价值。

参考文献：

- [1] M. Krumpholz and Linda P.B. Katehi, MRTD : New time - domain schemes based on multiresolution analysis [J]. IEEE.MTT , 1996 , 44 (4) : 555 - 571.
- [2] Y.W.Cheong , Y.M.Lee , K.H.Ra , J.G.Kang , and Ch.Ch.Shin. Wavelet - Galerkin scheme of time - dependent inhomogeneous electromagnetic problems [J] IEEE Trans. Microwave and guided wave letters , 1999 , 9 (8) : 297 - 299.
- [3] M.Krumpholz , H.G.Winful and L.P.B. Katehi. Nonlinear Time - domain modeling by multiresolution time domain (MRTD) [J] IEEE Trans. on MTT , 1997 , 45 (3) .
- [4] M.Werthen and I. Wolff. A wavelet based time domain moment method for the analysis of three - dimensional electromagnetic field [J] IEEE MTT - S Digest , 1998 : 1251 - 1254.
- [5] I.P.Hong , N.Yoon and H.K.Park. Numerical dispersive characteristics and stability condition of the multiresolution time - domain (MRTD) method. 0 - 7803 - 3608 - 9.
- [6] 郭汉伟 何建国. 基于多分辨率分析的数值积分算法 [J]. 国防科技大学学报 , 2000 ,(4).
- [7] 郭汉伟 梁甸农. 镜象滤波器收敛到小波的条件及小波的构造 [J]. 信号处理 , 2001 ,(1).
- [8] 郭汉伟. 小波分析在计算电磁学中的应用研究 [D]. 国防科技大学硕士学位论文 , 2000.
- [9] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J]. Journal of Computational Physics , 1994 , 114 (8) : 185 - 200.
- [10] 袁正宇 , 李征帆. 基于多分辨率的是与方法在微波集成电路中的应用 [J]. 上海交通大学学报 , 1999 ,(1).

