

文章编号: 1001-2486 (2001) 06-0048-06

自由飞行段弹道估计方法*

李盾, 周一宇, 吕彤光, 苗雨

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 主要研究空间预警系统利用星载红外传感器的视线测量估计弹道导弹自由飞行段弹道的问题。针对目标运动的弱可观测性, 提出了位置与速度依次滤波的改进 Gauss-Newton 方法, 解决了自由段弹道的最大似然估计问题, 利用 Monte Carlo 仿真实验验证了估计方法的有效性, 并对估计误差进行了分析。

关键词: 预警; 视线测量; 自由飞行段; 弹道估计

中图分类号: V412 **文献标识码:** A

The Study of Free Flight Phase Trajectory Estimation

LI Dun, ZHOU Yi-yu, LU Tong-guang, MIAO Yu

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: By using the line of sight (LOS) measurements from space-based infrared sensors, free flight phase trajectory estimation problem of ballistic missile is studied. Taking into account poor target motion observability, maximum likelihood estimation problem of trajectory is solved by using an improved Gauss-Newton algorithm by which the position and velocity are filtered in turn. Monte Carlo stimulation verifies the efficiency of this algorithm. Besides estimation error is analyzed.

Key words: early warning; LOS measurement; free flight phase; trajectory estimation

弹道导弹在火箭发动机关机后进入自由飞行段。弹头主要在重力作用下飞行, 其理想弹道是以地心为一个焦点的椭圆, 满足 Kepler 定律。此时, 导弹的运动可用无摄的二体运动方程来描述, 是一个过程噪声为零的确定性系统^[1-3]。在地心惯性坐标系 (ECI) 下, 一旦关机后某参考时刻位置与速度确定, 自由飞行段弹道就完全确定。因此, 对弹道的估计转化为对参考时刻运动状态的估计。

位于特定轨道的空间预警系统可以利用红外传感器的被动观测, 获取传感器到目标的视线 (LOS) 测量信息, 包括方位与俯仰角, 实现对自由飞行段弹道的有效估计^[4]。经典的方法是 Laplace 方法, 但该方法对相对位置及数据更新率要求很高, 且估计精度较差^[3]。文献 [5, 6] 中采用了非线性最小二乘滤波的方法来提高估计精度。但是, 由于没有距离信息, 弹道估计最大的问题来自于目标运动的弱可观测性^[2, 3, 6, 7], 体现为 Fisher 信息矩阵条件数极大。若直接采用文献 [5] 中的 Gauss-Newton 方法求解, 不仅对初始估计要求高, 且由于弱可观测性导致滤波易发散。

1 运动与测量方程

设目标在 ECI 坐标系下位置为 $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$, 速度为 $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z)^T$, 则 t 时刻运动状态记为 $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))^T$ 。根据二体运动的微分方程^[1]

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\mu \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} \quad (1)$$

其中 $\mu = 3.986012 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ 为地球引力常数。(1) 式是个二阶的微分方程组, 一旦确定了参考时刻 t_r 运动状态的 6 个分量 (即 6 个积分常数), 方程就完全确定。记 t_r 时刻运动状态为 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}(t_r) = (\mathbf{r}(t_r), \dot{\mathbf{r}}(t_r))^T$, 则目标运动方程可记为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r, t) \quad (2)$$

* 收稿日期: 2001-5-16

作者简介: 李盾 (1971-), 男, 博士生。

$f(\cdot)$ 显然是非线性的,可以采用数值积分方法(如四阶 Runge-Kutta 法)计算,也可以直接采用文献[1]中的方法。

假定目标红外辐射被 N_s 个星载红外探测器依次观测到,共 M 组视线观测,分别对应于 t_1, t_2, \dots, t_M 时刻,且对应的卫星位置分别为 $s_{n_s(1)}(t_1), s_{n_s(2)}(t_2), \dots, s_{n_s(M)}(t_M)$,其中下标 $n_s(k)$ 对应 t_k 时刻获得 LOS 测量的卫星,则测量方程为

$$z(k) = h(x_r, t_r, t_k, s_{n_s(k)}(t_k)) + w(k), \quad k = 1, \dots, M, 1 \leq n_s(k) \leq N_s \quad (3)$$

其中, $z(k)$ 是二维矢量,表示 t_k 时刻 LOS 测量的方位角 $a(x_r)$ 与俯仰角 $e(x_r)$, $w(k)$ 是传感器的测量噪声,它是零均值的高斯随机过程,且方差矩阵 R_k 已知。假定测量独立,且 N_s 个传感器具有同样的测量误差方差。将 $h(x_r, t_r, t_k, s_{n_s(k)}(t_k))$ 记为 $h_k(x_r)$,将卫星位置 $s_{n_s(k)}(t_k)$ 记为 $s_k = (s_{kx}, s_{ky}, s_{kz})^T$,则有

$$h_k(x_r) = \begin{bmatrix} a_k(x_r) \\ e_k(x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \left[\frac{r_{ky}(x_r) - s_{ky}}{r_{kx}(x_r) - s_{kx}} \right] \\ \arcsin \left[\frac{r_{kz}(x_r) - s_{kz}}{\|r_k(x_r) - s_k\|} \right] \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, M \quad (4)$$

其中 $a_k(x_r)$ 应当转换到 $[0, 2\pi]$ 中去,且卫星的位置 s_k 是已知的。方差矩阵 R_k 可以进一步写为

$$R_k = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{LOS}^2}{\cos^2[e_k(x_r)]} & 0 \\ 0 & \sigma_{LOS}^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中 σ_{LOS}^2 是角测量误差方差。对自由飞行段弹道的估计就转化为利用测量集 $Z_M = \{z(k), k = 1, \dots, M\}$ 对参考时刻 t_r 状态 x_r 的估计,参考时刻 t_r 可以选为关机点时刻或关机后的某一时刻。

2 对参考时刻状态的估计

2.1 最大似然估计

对 x_r 的估计可以采用最大似然估计方法。测量 $z_k(x_r)$ 的条件概率密度为

$$p[z(k) | x_r] = |2\pi R_k|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [z(k) - h_k(x_r)]^T R_k^{-1} [z(k) - h_k(x_r)] \right\} \quad (6)$$

测量集 Z_M 的似然函数为

$$\Delta Z_M(x_r) = \left[\prod_{k=1}^M |2\pi R_k|^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} v^T(x_r) v(x_r) \right\} \quad (7)$$

其中

$$v(x_r) = \begin{bmatrix} R_1^{-\frac{1}{2}} [z(1) - h_1(x_r)] \\ \vdots \\ R_M^{-\frac{1}{2}} [z(M) - h_M(x_r)] \end{bmatrix}_{2M \times 1} \quad (8)$$

令 $J(x_r) = v^T(x_r) v(x_r)$, 则 x_r 的最大似然估计为

$$x_r^{MLE} = \arg \max_{x_r \in \mathcal{D}^6} \Delta Z_M(x_r) = \arg \max_{x_r \in \mathcal{D}^6} J(x_r) \quad (9)$$

这实际上是非线性的最小二乘估计问题。

2.2 改进的 Gauss-Newton 算法

理论上,求解(9)式可以采用 Gauss-Newton 方法,令

$$\mathbf{I}(x_r) = [\nabla_{x_r} v^T(x_r)]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(x_r) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_M(x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1^{-\frac{1}{2}} [\nabla_{x_r} h_1^T(x_r)]^T \\ \vdots \\ -R_M^{-\frac{1}{2}} M [\nabla_{x_r} h_M^T(x_r)]^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

给定初始估计 $x_{r(0)}^{\text{MLE}}$, 则可通过迭代求解 x_r^{MLE} . 设 $x_{r(n)}^{\text{MLE}}$ 为第 n 次迭代结果, 则 x_r 的最大似然估计为

$$x_{r(n+1)}^{\text{MLE}} = x_{r(n)}^{\text{MLE}} - [\mathbf{I}_{(n)}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{I}_{(n)}(x_r)]^{-1}\mathbf{I}_{(n)}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{v}(x_{r(n)}^{\text{MLE}}) \quad (11)$$

在弱可观测条件下, 直接采用 (11) 式不可行. 主要问题在于, Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{I}(x_r)$ 是一个病态矩阵 (条件数极大, 矩阵关于 2-范数的条件数定义为最大与最小奇异值之比, 通常条件数小于 10^3 的矩阵为良态矩阵), 矩阵接近奇异, 从而在求解 $[\mathbf{I}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{I}(x_r)]^{-1}$ 时得到的解严重失真, 致使迭代发散. 因此, 必须寻求更加稳健可靠的方法.

文献 [6] 采用了 Levenberg-Marquardt 方法求解 (11) 式, 将 (11) 式修正为

$$x_{r(n+1)}^{\text{MLE}} = x_{r(n)}^{\text{MLE}} - [\mathbf{I}_{(n)}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{I}_{(n)}(x_r) + \lambda\mathbf{I}_6]^{-1}\mathbf{I}_{(n)}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{v}(x_{r(n)}^{\text{MLE}}) \quad (12)$$

其中, \mathbf{I}_6 是 6 阶单位矩阵, λ 为正的常数且根据一定规则不断进行调整^[6,8], $\lambda\mathbf{I}_6$ 称为阻尼项. 采用文献 [6,8] 中的 L-M 方法能够解决大部分问题, 获得一致和有效的估计, 但仍然存在不足. 一是在某些很不利的条件下 (如单个卫星观测) 收敛很慢, 且可能收敛于鞍点, 迭代仍然无法进行下去; 二是方法比较复杂, 需要根据规则不断调整阻尼因子.

令 $x_r = [r_r', \dot{r}_r']^{\text{T}}$, 且将 Jacobian 矩阵 $\mathbf{I}_{(n)}(x_r)$ 分块写成

$$\mathbf{I}_{(n)} = [\mathbf{I}_{p(n)} \quad \vdots \quad \mathbf{I}_{v(n)}] \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{I}_{p(n)} = [\nabla_{r_r} \mathbf{v}^{\text{T}}(x_r)]^{\text{T}}, \quad \mathbf{I}_{v(n)} = [\nabla_{\dot{r}_r} \mathbf{v}^{\text{T}}(x_r)]^{\text{T}}$$

则 Fisher 矩阵可写成

$$\mathbf{I}_{(n)}^{\text{T}}(x_r)\mathbf{I}_{(n)}(x_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)} & \mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)} \\ \mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)} & \mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

根据矩阵理论, (12) 式中将阻尼项加到对角线元素上可以改善 Fisher 矩阵的条件^[8]. 实际上, 仿真实验表明, 子矩阵 $\mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)}$ 和 $\mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)}$ 各自的条件都比较好, 各自对角线元素数量级相差很小 (仿真中 $\mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)}$ 对角线元素约为 10^3 量级, 而 $\mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)}$ 对角线元素约为 10^7 量级), 因而, 主要是子块 $\mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)}$ 与 $\mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)}$ 对角线元素数量级的较大差异导致了 Fisher 矩阵条件数的急剧增大.

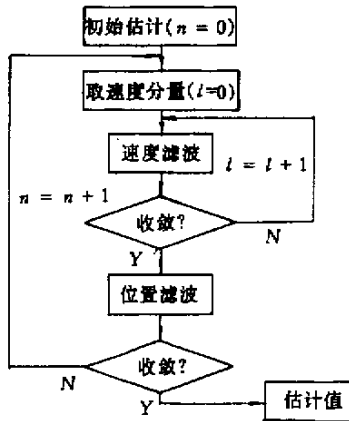


图 1 算法流程

Fig.1 Algorithm flow

由此, 本文提出了一种简单实用的改进方法, 即将位置和速度的滤波分开进行. 先固定位置矢量, 利用 $\mathbf{I}_{v(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n)}$ 进行速度滤波, 获得有偏估计, 再固定速度矢量, 利用 $\mathbf{I}_{p(n)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{p(n)}$ 更新一次位置矢量. 重复上述步骤, 直至满足收敛准则. 由此得到图 1 所示的算法. 对速度的迭代为

$$\dot{r}_{r(n,l+1)}^{\text{MLE}} = \dot{r}_{r(n,l)}^{\text{MLE}} - [\mathbf{I}_{v(n,l)}^{\text{T}}\mathbf{I}_{v(n,l)} + \lambda\mathbf{I}_3]^{-1}\mathbf{I}_{v(n,l)}^{\text{T}}\mathbf{v}(x_{r(n,l)}^{\text{MLE}}) \quad (15)$$

其中 $\mathbf{x}_{r(n,l)}^{\text{MLE}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{r(n)}^{\text{MLE}} \\ \dot{\mathbf{r}}_{r(n,l)}^{\text{MLE}} \end{bmatrix}$ 。对位置的更新为

$$\mathbf{r}_{r(n+1)}^{\text{MLE}} = \mathbf{r}_{r(n)}^{\text{MLE}} - [\mathbf{\Gamma}_{p(n)}^{\text{T}} \mathbf{\Gamma}_{p(n)} + \lambda_p \mathbf{I}_3]^{-1} \mathbf{\Gamma}_{p(n)}^{\text{T}} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{r(n)}^{\text{MLE}}) \quad (16)$$

因为 $\mathbf{\Gamma}_{p(n)}^{\text{T}} \mathbf{\Gamma}_{p(n)}$ 与 $\mathbf{\Gamma}_{v(n)}^{\text{T}} \mathbf{\Gamma}_{v(n)}$ 条件数都较小,本文提出的算法首先克服了病态矩阵求逆问题。在观测条件略好(如两颗卫星观测)的情况下(15)~(16)式中阻尼因子 λ_p 和 λ_v 均取为零,对位置和速度的滤波成为标准的 G-N 方法,因而非常简单,在很不利的观测条件下(如单星观测)(15)和(16)为 L-M 方法,但 λ_p 和 λ_v 也可取得非常小,主要在个别迭代步上起到保护作用。另一方面,在本文的估计问题中,可以获得相对误差较小的位置初始估计,而对速度初始估计的相对误差则很大。仿真实验表明,对于位置矢量的约束在滤波过程中起着主要作用。因此,先固定位置对速度滤波能够保证收敛性。此外,本文提出的方法比(12)式采用的标准 L-M 方法更加简单。此外, Jacobian 矩阵 $\mathbf{\Gamma}_{p(n)}$ 和 $\mathbf{\Gamma}_{v(n)}$ 的求解可以采用数值方法^[168]。

2.3 估计的初始化

采用简单有效的初始化方法,适用于单个及多个卫星观测情况。记(4)式中

$$\mathbf{r}(t_k) - s_k = \rho_k \mathbf{u}_k \quad k = 1 \dots M \quad (17)$$

其中 ρ_k 是目标到卫星的距离,而

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{r}(t_k) - s_k}{\|\mathbf{r}(t_k) - s_k\|} \quad (18)$$

显然有

$$\mathbf{r}(t_r) - s_r = \rho_r \mathbf{u}_r \quad (19)$$

利用常加速模型描述目标的运动,任意时刻 t_k ($k \neq r$) 目标位置 $\mathbf{r}_k(x_r)$ 为

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_r + \dot{\mathbf{r}}_r(t_k - t_r) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_r(t_k - t_r)^2 \quad k = 1 \dots M, k \neq r \quad (20)$$

将(19)式代入(20)式并利用(17)式得到

$$s_k - s_r = \dot{\mathbf{r}}_r(t_k - t_r) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_r(t_k - t_r)^2 - \rho_r \mathbf{u}_r - \rho_k \mathbf{u}_k \quad k = 1 \dots M, k \neq r \quad (21)$$

在(21)式两边同时使用 \mathbf{u}_k ($k \neq r$) 进行向量叉乘(算子 \otimes),可以消去 $\rho_k \mathbf{u}_k$ ($k \neq r$) 项,得到

$$\begin{aligned} (t_k - t_r) \cdot (\mathbf{u}_k \otimes \dot{\mathbf{r}}_r) + \frac{1}{2} (t_k - t_r)^2 \cdot (\mathbf{u}_k \otimes \ddot{\mathbf{r}}_r) - \rho_r \cdot (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_r) = \mathbf{u}_k \otimes (s_k - s_r) \\ k = 1 \dots M, k \neq r \end{aligned} \quad (22)$$

$M \geq 5$ 时,可以获得(22)式的最小二乘解。(22)式的线性最小二乘问题矩阵条件数也比较大,必须采用 Golub 方法^[8]求解。利用(22)式得到 $\dot{\mathbf{r}}_r$ 和 ρ_r , 将 ρ_r 代入(19)式得到 \mathbf{r}_r , 由此获得 x_r 的初始估计值 $\mathbf{x}_{r(0)}$ 。

理论上,对于单个卫星观测的情况可以采用(22)式处理,但是实际上此时可观测性非常弱,直接求解(25)式得到的解严重失真。因此,可以先采用更简单的方法直接得到 ρ_r , 再得到 $\mathbf{x}_{r(0)}$ 。首先,可以根据先验知识确定 $\|\mathbf{r}_{r(0)}\|$, 而

$$\|\mathbf{r}_{r(0)}\| = r_{\text{eff}} + \text{alt} \quad (23)$$

其中, r_{eff} 是地球半径, alt 是目标的高度,一般为几十千米。由于 r_{eff} 很大(约 6371 km), 因此,即使大致设定的 alt 与真实值差几十千米, $\|\mathbf{r}_{r(0)}\|$ 估计的相对误差也较小。根据几何关系有

$$\rho_r^2 + \mathcal{X}(\mathbf{u}_r^{\text{T}} \cdot s_r) \rho_r + \|s_r\|^2 = \|\mathbf{r}_{r(0)}\|^2 \quad (24)$$

求解(24)式取其中大于地球半径 r_{eff} 的正根就得到 ρ_r , 代入(19)式就得 $\mathbf{r}_{r(0)}$, 同样可利用(17)~(22)式的步骤得到 $\dot{\mathbf{r}}_{r(0)}$ 。

3 仿真实验与结果分析

仿真实验条件同文献[6], 考虑单星观测(S_1)和双星(S_1 和 S_2)观测两种情况。目标是射程约

1000 km 的某弹道导弹,参考点时刻 t_r 目标在 ECI 坐标系中位置 $r_r^{TRUE} = (3936.42, 3936.42, 3214.07)$ km, 速度 $\dot{r}_r^{TRUE} = (-0.4028, 0.1792, 0.2360)$ km/s。假定观测的低轨卫星轨道都为圆形,位于赤道平面上,自东向西飞行,且海拔高度为 1000 km。在 t_r 时刻 S_1 在北纬 0° 、东经 0° , S_2 位于北纬 0° 、东经 90° 。观测时间窗取为 60 s, LOS 测量的数据采样间隔 T_s 可改变,产生不同的测量次数 M 。LOS 测量噪声均方根分别取为 $5 \mu\text{rad}$ 、 $10 \mu\text{rad}$ 和 $25 \mu\text{rad}$, 分别进行 100 次 Monte Carlo 仿真。

残差加权平方和 $J(x_r^{MLE})$ 近似服从自由度为 $(mn_z - n_x)$ 的 χ^2 分布^[2,3] 其中 m 为测量次数, n_z 为测量量个数, n_x 为待估计的参数个数。给定置信水平 $1 - \alpha$ (取 95%), 若估计值与测量值比较符合, 则 N 次 Monte Carlo 仿真满足下列检验^[2,3]

$$\bar{J}_{lb} = \frac{\chi_{(2M-6)N}^2(0.025)}{N} \leq \bar{J}(x_r^{MLE}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J^{(i)}(x_r^{MLE}) \leq \frac{\chi_{(2M-6)N}^2(0.975)}{N} = \bar{J}_{ub} \quad (26)$$

其中 $J^{(i)}(x_r^{MLE})$ 表示第 i 次仿真的结果。将结果列成表 1, 表中括号外是单星观测, 括号内是双星观测。单星由于可观测性较差, 个别情况残差稍大; 而双星观测情况则完全满足 (26) 式。

仿真实验位置及速度误差的均方根及对应的 Cramer-Rao 下限分别见图 2~5。如图所示, 单星观测对目标状态估计误差较大, 基本能达到 C-R 下限。在双星观测情况下, 仿真值与 C-R 下限符合得非常好, 几乎完全重合。比较图 2~5 可看出, 由于双星对可观测性的极大改善, 大大减小了位置及速度估计误差。因此, 采用双星观测比较理想。从图中还可看出, 减小观测时间间隔 (增加观测次数) LOS 测量误差都能够提高估计精度, 但 LOS 测量误差对估计精度的影响更大。

表 1 实际测量与估计值拟合程度检验

Tab.1 "goodness of fit" test between actual and estimation measurements

T_s	M	\bar{J}_{lb}	$\bar{J}(x_r^{MLE})$			\bar{J}_{ub}
			$\sigma = 5\mu\text{rad}$	$\sigma = 10\mu\text{rad}$	$\sigma = 20\mu\text{rad}$	
10	6	5.534	5.575 (5.033)	6.667 (5.135)	6.569 (5.198)	6.698
6	10	12.982	14.969 (13.037)	14.344 (12.771)	14.757 (13.051)	15.056
5	12	16.843	20.060 (17.159)	19.087 (17.203)	16.848 (17.354)	19.195
4	15	22.661	24.430 (22.834)	24.750 (23.003)	24.869 (22.418)	25.377
3	20	32.403	33.738 (31.415)	34.148 (32.038)	33.243 (32.704)	35.635
2	30	51.982	52.406 (52.069)	52.609 (52.283)	51.954 (52.834)	56.056

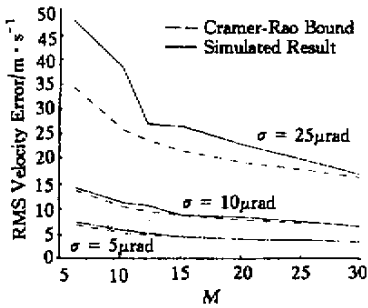


图 2 单星观测对位置估计误差

Fig.2 RMS position error for single satellite scenario

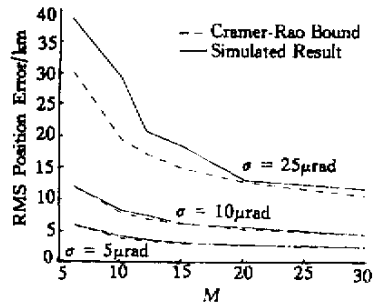


图 3 单星观测对速度估计误差

Fig.3 RMS velocity error for single satellite scenario

4 结束语

利用星载红外传感器的视线测量估计弹道导弹自由飞行段弹道的问题, 该问题转化为对参考时刻运动状态的估计。由于目标运动的弱可观测性, Fisher 信息矩阵条件数很大, 通用的 Gauss-Newton

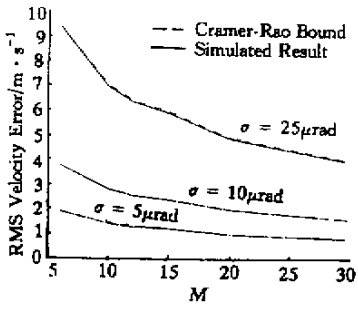


图4 双星观测对位置估计误差

Fig.4 RMS position error for two satellites scenario

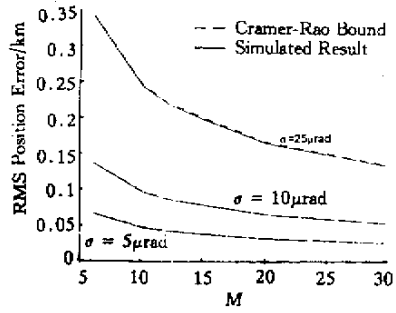


图5 双星观测对速度估计误差

Fig.5 RMS velocity error for two satellites scenario

方法是失效的。采用简单有效的初始估计方法，提出位置与速度依次滤波的改进 Gauss-Newton 方法，克服了单星观测情况下 L-M 方法的不足，又比 L-M 方法更加简单有效，解决了弹道的最大似然估计问题。Monte Carlo 仿真实验表明，算法非常稳健，对单星或双星观测的情况都是有效的，能够获得均方意义下的最优估计。

参考文献：

- [1] Bate R, et al. Fundamentals of Astrodynamics [M]. New York: Dover, 1971.
- [2] Bar-Shalom Y, Li X R. Estimation and Tracking: Principles, Techniques and software [M]. Artech House, Norwood, MA, 1993.
- [3] Blackman S, Popoli R. Design and Analysis of Modern Tracking Systems [M]. Artech House, Norwood, MA, 1999.
- [4] James E S, Paul R C. Space-Based Infrared Satellite System (SBIRS) Requirements Management [C]. IEEE Aerospace Applications Conf. Proc. Vol.5, 1998: 223-232.
- [5] Chang C B. Ballistic Trajectory Estimation with Angle-Only Measurements [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-25 (3), June 1980: 474-480.
- [6] Yeddanapudi M. Estimation and Data Association Algorithm for Multisensor-Multitarget Tracking [D]. Ph.D. Dissertation, Electrical and System Engineering Department, University of Connecticut, May 1996.
- [7] 孙仲康, 周一宇, 何黎星. 单多基地有源无源定位技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.
- [8] 粟塔山等编著. 最优化计算原理与算法程序设计 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.

