

文章编号:1001-2486(2001)06-0095-04

并联机构奇异点分析的新方法*

吴宇列¹, 吴学忠¹, 刘冠峰², 李圣怡¹

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073; 2. 香港科技大学电气与电子工程系, 香港)

摘要 根据并联机构位形空间的特点, 采用微分几何和微分拓扑的方法, 提出了一种并联机构奇异点的新的分类方法, 即分为拓扑奇异点, 参数化奇异点两种类型, 并把它与现有的几种分类方法进行了比较。

关键词 并联机构; 奇异点; 流形; 拓扑

中图分类号: TP112.1 文献标识码: A

A New Method for Singularity Analysis of Parallel Manipulators

WU Yu-lie¹, WU Xue-zhong¹, LIU Guan-feng², LI Sheng-yi¹

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(2. Department of Electrical and Electronics Engineering, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong)

Abstract Based on the property of configuration space of parallel manipulators and by using differential geometry and topology, this paper proposes a new approach for the classification of singularity of parallel manipulators, two types of singularity are obtained, i.e., topology singularity and parameterization singularity. Also comparisons with existing classification methods are made.

Key words parallel mechanisms; singularity; manifolds; topology

奇异点是机构设计和控制中一个重要的问题, 串联机构由于各关节的独立性, 其奇异点比较简单, 而并联机构是由不独立的关节闭环而形成的, 其奇异点要复杂得多。虽然对并联机构的奇异点目前已有许多的文章进行了研究, 但大都是针对特定机构的分析或算法的研究, 而对奇异点本身的特征的研究却并不多。奇异点本身的特征是指研究奇异点的分类及其各种类型的特点。对并联机构的奇异点, 目前有三种分类方法, 即 Gosselin 和 Angeles^[1]的速度关系方法, Ma 和 Angeles^[2]的机构特征方法以及最近的 F.C Park^[3]的微分几何法, 这三种方法各有特点, Gosselin 和 Angeles 的方法简洁明了, 但是他没有说明并联机构奇异点的实质问题, Ma 和 Angeles 在 Gosselin 和 Angeles 的基础上分析了并联机构位形空间的特点, 提出了一种结构奇异点, 但他的分类方法也不全面。F.C Park 根据并联机构位形空间本身的特点, 引入微分流形的概念来分析并联机构的奇异点, 把它分为位形空间奇异点, 驱动奇异点以及末端执行器奇异点, 这种分类方法较好地描述了并联机构奇异点的特点, 但其对并联机构位形空间奇异点的特点没有进行深入分析。本文将在上述三种分类方法的基础上, 根据并联机构位形空间拓扑结构的特点, 采用微分拓扑和微分几何为数学工具, 提出了一种新的分类方法, 即把它分为, 拓扑结构奇异点和参数化奇异点, 这种方法具有明确的物理和数学意义, 较好地体现了并联机构的特点, 并且可以包容上述三种方法。

1 基本概念

一般的几何和代数的方法可以解决机构分析中的许多计算问题, 如正解, 反解, 工作空间等, 但是对于多自由度机构进行理论分析和符号运算时却显得力不从心, 从得出的十分复杂的方程中很难看出机构的特点。而并联机构由于各关节的不独立, 其位形空间是十分复杂的多维非欧空间, 而微分几何, 微分流形, 微分拓扑等现代数学就是以研究高维非欧空间著称的专门数学, 因此在并联机构的研究中引入这些数学工具是自然和合适的选择, 可以从理论上对并联机构进行深入的分析。以下给出一些基本概

* 收稿日期: 2001-04-11
基金项目: 国家自然科学基金海外青年合作研究基金(50029501)
作者简介: 吴宇列(1972-)男, 博士生。

念的简单介绍,详细内容可参阅文献[4]

(1)同胚(微分同胚)连续的一一映射,如果逆映射也连续则称为同胚映射。如果同胚的正逆映射都是可微的,则称为微分同胚。

(2)拓扑空间:在一个集合中,定义满足一定关系的开集族就构成一个拓扑空间。

(3)流形(微分流形):局部同胚于 n 维欧氏空间的 Hausdorff 拓扑空间称为 n 维流形,如果是微分同胚则称为微分流形。

对于串联机构,由于各关节的独立性,由其关节构成的位形空间是一个比较简单的欧氏空间。而并联机构各关节不是独立的,设其自由度为 n ,则其位形空间不能由任意 n 个关节来表示,但是在局部位形空间中可以由某 n 个关节来表示,由于并联机构位形空间坐标的局部性及可微性,我们可以引入微分流形的概念。

2 并联机构的位形空间

通常并联机构由一个或几个串联分支组成,串联分支一端固定,另一端也固定或共同连接在一个可以活动的平台上。为了研究方便,我们把并联机构每一分支的另一端的关节拆开,使其成为一组可以自由活动的串联机构。如图 1 的 5 杆机构,可以把它拆成一个 4 自由度 4R 类型的串联机构。

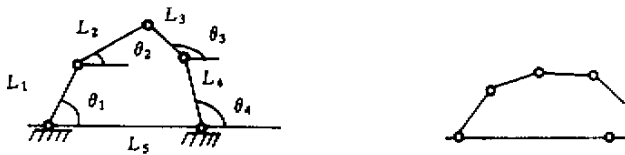


图 1 5 杆机构及其拆分

Fig.1 Five-bar mechanism and its cutting

设拆开后的串联机构共有 n 个关节,其关节空间为 N ,它是一个 n 维的欧氏空间,也是一个 n 维的流形,坐标表示为 $\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n)$;串联机构末端所在的包含空间为 M ,其维数为 m ,它也是一个 m 维的欧氏空间及流形,坐标表示为 $x(x_1, \dots, x_m)$,则整个机构定义了一个流形之间的光滑映射, $f:R^n \rightarrow R^m$ 。即:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ x_m = f_m(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{cases} \tag{1}$$

对于无约束的串联机构,其关节 $\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 可以任意取值。而末端空间 $f(\theta)$ 是其包含空间 M 的一个子空间,其上每一个点对应一个并联机构。

设任意 $x \in f(\theta) \subset M$,则定义 x 所对应的并联机构的位形空间为:

$$Q = f^{-1}(x) \tag{2}$$

位形空间 Q 是关节空间 N 的子空间,维数是 $n - m$ 。由于奇异点的存在,严格地说,它一般不是一个空间 N 的子流形。

3 并联机构的奇异点

并联机构的奇异点可以定义为机构位形空间中无法运动或控制的点。位形空间 Q 的拓扑结构十分复杂,并且与映射 f 的临界点有着密切的关系。根据 f 与位形空间拓扑结构的关系,我们把并联机构的奇异点分为拓扑奇异点和参数化奇异点。拓扑奇异点是指在映射 f 下并联机构拓扑结构发生改变的点,参数化奇异点是指在一个流形(位形空间)中由于局部坐标的选取而引入的奇异点。

3.1 拓扑奇异点

设映射 f 的切映射为 df ,它把关节空间 N 的切向量映射到末端空间的切向量,也就是把关节空间

的速度映射到末端空间中的速度。根据微分拓扑理论,如果一点 $\theta(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 使 df 为满映射,则该点称为正则点,否则称为临界点。对末端空间中的一点 x ,如果 $f^{-1}(x)$ 包含任何的临界点,则称为临界值,否则称为正则值。任何正则值的原像 $f^{-1}(x)$ 都是一个原空间 M 的子流形。我们把 N 中临界点的集合定义为 D ,它也是 N 的子空间。映射 f 把 D 映射到 $f(D)$, $f(D)$ 是临界值的集合,它是末端空间的子空间,我们把这种由临界值构成的集合称为临界面。根据 Sard 定理^[5],光滑映射临界值的集合的测度为零,因此可以推断 $f(D)$ 的维数必然小于末端空间的维数 m 。临界面把末端空间 $f(N)$ 分为几个不相通的部分,在每部分的内部,是映射 f 的正则值,每个正则值对应的子流形 $f^{-1}(x)$ 是同胚的,但不同部分的正则值对应的子流形 $f^{-1}(x)$ 则不一定同胚,经过临界面 $f^{-1}(x)$ 会改变拓扑结构,它所对应的并联机构的位形空间的拓扑结构也会改变,因此把临界面上的点所对应的临界点称为并联机构的位形空间的拓扑奇异点。

以图 1 所示的 5 杆机构为例,它对应的映射为:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) - L_3 \cos(\theta_3) - L_4 \cos(\theta_4) \\ y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) - L_3 \sin(\theta_3) - L_4 \sin(\theta_4) \end{cases} \quad (3)$$

其 Jacobi 矩阵为:

$$\begin{bmatrix} -L_1 \sin(\theta_1) & -L_2 \sin(\theta_2) & L_3 \sin(\theta_3) & L_4 \sin(\theta_4) \\ L_1 \cos(\theta_1) & L_2 \cos(\theta_2) & -L_3 \cos(\theta_3) & -L_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其不满秩的条件为:

$$\begin{cases} \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_3) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_4) = 0 \\ \sin(\theta_2 - \theta_3) = 0, \sin(\theta_2 - \theta_4) = 0, \sin(\theta_3 - \theta_4) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

以上条件等价于 4 个活动杆处于同一直线上。由于 4 杆在同一直线,因此临界面是一个圆。(5)式一共有 8 组解,对应的 8 个临界圆其半径为 $r = L_1 \pm L_2 \pm L_3 \pm L_4$,如图 2 所示。在两个临界圆之间的点都是正则点,其对应的并联机构的位形空间是同胚的,临界圆上的点就是对应并联机构的拓扑奇异点,经过临界圆,位形空间的拓扑结构会发生改变。本文的拓扑奇异点与 Park 提到的位形空间奇异点是一致的,但是他没有阐明这种奇异点的拓扑意义。

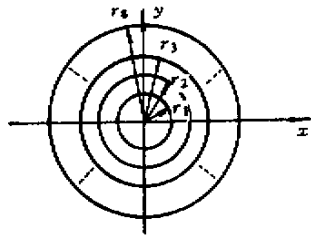


图 2 5 杆机构临界面分布图

Fig.2 Critical surfaces of five-bar mechanism

3.2 参数化奇异点

参数化奇异点是由并联机构位形空间本身的特点决定的。在两个临界面内的点对应的并联机构的位形空间是关节空间 $\theta(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 中的一个子流形,而临界面上的点对应的并联机构的位形空间,如果去掉拓扑奇异点,它也是一个不连通的子流形,因此可以把并联机构的位形空间看成一个流形。由于流形是局部同胚于欧氏空间的,一般不存在全局坐标,但局部可以用某一坐标表示,而那些局部坐标不能表示的点,就是它的参数化奇异点。

如对于映射(1)在末端空间任取一点 x ,则构成的并联机构的约束方程为 $f(\theta) = x$,选取任意 n 个关节作为局部坐标(驱动关节或末端执行器坐标),则其 Jacobi 矩阵可以写为:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_a} & \frac{\partial f}{\partial \theta_b} \end{bmatrix} = [J_a \quad J_b] \quad (6)$$

J_a 表示局部坐标对应的部分, J_b 表示其他关节对应的部分, 当 $\det(J_b) = 0$, 对应的点就是局部坐标不能表示的点, 即机构的参数化奇异点。如果使 $\det(J_b) = 0$ 的点不是孤立的点而是一个区域或整个位形空间, 则称为退化的参数奇异点。

以 5 杆机构为例, 选取 θ_1, θ_4 为局部坐标(驱动关节), 则参数化奇异点满足条件 $L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) = 0$, 即 $\theta_2 = \theta_3$ 或 $\theta_2 = \pi + \theta_3$, 当 $L_2 = L_3$ 时有退化的参数化奇异点。三种奇异点如图 3 所示。

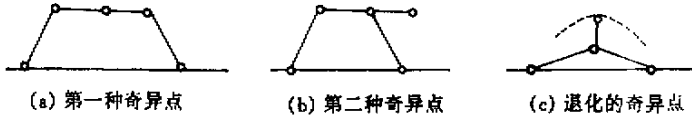


图 3 5 杆机构的参数化奇异点

Fig.3 Parameterization singularity of five-bar mechanism

应该指出, 如果某一点不能被所有的关节局部坐标表示, 那么这一点就成为一个拓扑奇异点, 这是由矩阵知识很容易得出的结论。本文定义的参数奇异点包括 Gosselin 和 Angeles 定义的第一种和第二种奇异点, 他们定义的第三种奇异点只不过是 2 个参数奇异点的组合。F. C Park 定义的驱动奇异点和末端执行器奇异点也属于参数奇异点, 他定义的退化的驱动奇异点是一种退化的参数奇异点。Ma 和 Angeles 定义的所谓结构奇异点其实是一种退化的驱动奇异点。

从以上的分析可以看出, 本文定义的这两种奇异点能较好地体现并联机构位形空间本身的特点, 并包含了以前的各种定义方法。由于本文着重于并联机构奇异点分类研究, 对于奇异点的具体算法未加分析, 具体可参考黄真^[6]、赵新华^[7]、J. Merlet^[8]、Collins^[9]等人的文章。

4 结论

采用微分拓扑和微分流形的方法定义了两种类型的奇异点, 并以 5 杆机构为例进行了说明, 采用这种定义方法, 便于采用现代数学工具对并联机构的奇异点进行深入的分析和研究, 这对并联机构的优化设计和控制是有帮助的。

参考文献:

- [1] Gosselin C, Angeles J. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
- [2] Ma O, Angeles J. Architecture Singularities of Parallel Manipulators[J]. The International Journal of Robotics and Automation, 1992, 7(1): 23-29.
- [3] Park F C, Kim J M. Singularity analysis of closed kinematic chains[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121(1).
- [4] 陈维恒. 微分流形初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [5] 王则柯, 凌志英. 拓扑理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
- [6] 黄真. 并联机器人机构学理论与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- [7] 赵新华. 并联机器人奇异位形研究[J]. 机械工程学报, 2000(5).
- [8] Merlet J P. Singular Configuration of parallel manipulators and Grassman Geometry[J]. The Int. Journal of Robotics Research, 1989, 8(5).
- [9] Collins C L. Singularity Analysis And Design of Parallel Manipulator[D]. Ph.D Dissertation of UCI, 1997.

